ПРИГЛАШЕНИЕ К ОТКРЫТИЮ

(ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА КОШИ)

Посвящается 150-летию со дня смерти великого французского математика Огюстена Луи Коши

Д. П. Мавло

Как-то не верится, что прошло уже 150 лет со дня смерти О. Л. Коши — знаменитого французского математика, внесшего заметный вклад почти во все разделы математики. Результаты этого великого математика удивительно современны, о его жизни и творчестве продолжают выходить монографии [9], [10]. Все те, кто изучал математический анализ, не могли не заметить это имя — столь часто оно встречается в самых различных контекстах (теорема Коши, неравенство Коши, остаточный член в форме Коши, формула Коши-Адамара, последовательности Коши и т. д.). Из всех многообразных достижений этого блестящего математика нам хочется выделить только одно: в 1821 году в своём ставшем знаменитым Cours d'Analyse de l'Ecole Royal Polytechnique [1] Коши опубликовал доказательство неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим n неотрицательных чисел

$$G_n \le A_n \tag{1}$$

(здесь и далее мы будем пользоваться стандартными [2—5] обозначениями для среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического соответственно:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

$$H_n = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}, \ x_i > 0, \ 1 \le i \le n \in N). \tag{2}$$

Когда неравенство (1) уже доказано, нетрудно установить и доказать неравенство

$$H_n \le G_n, \tag{3}$$

используя замену переменных $a_i = x_i^{-1}$ в (1), что позволяет дополнить (1) до стандартного хорошо знакомого вида

$$H_n \le G_n \le A_n. \tag{4}$$

Неравенство (4) сыграло и продолжает играть заметную роль в математике. Трудно указать такой её раздел, в котором при выводе тех или иных фундаментальных результатов не использовалось бы это неравенство или следствия из него. Если посмотреть формально на текст типичной статьи по анализу, теории чисел или теории дифференциальных уравнений, то бросается в глаза, что утверждений, формулируемых в виде неравенств, по крайней мере, не меньше, чем утверждений в форме равенств, а зачастую и много больше: оценки, оценки, оценки... И среди не столь уж многих эффективных средств, позволяющих делать эти оценки, неравенство (4) занимает почётное, если не первое, место. Поэтому, когда Харди, Литтлвуд и Пойа [4] начинают раздел «Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом» своей книги «Неравенства» словами: «Мы переходим теперь к самой знаменитой теореме нашего предмета», — это не удивляет даже неискушенного читателя. С ними нельзя не согласиться, когда там же они продолжают по поводу неравенства (4): «Эта теорема настолько важна, что мы даём для неё несколько доказательств разной степени простоты и общности». Принимая во внимание важность и эффективность неравенства (4), совершенно понятно, что любые обобщения этого неравенства должны быть рассмотрены со вниманием, ибо они могут сработать там, где неравенство (4) оказалось недостаточным и, следовательно, породить новые, более сильные, чем известные ныне, результаты во многих областях математики и её приложений. Анализ книги [4] и более поздних обзоров по неравенствам [2], [5] и удивляет, и разочаровывает в этом отношении. Отдавая должное неравенству [4] («Мы переходим к теме, которой одной можно было бы посвятить целую монографию — а именно, к известному неравенству между арифметическим и геометрическим средними n неотрицательных чисел. Этот фундаментальный результат будет доказан двенадцатью способами...»), авторы прекрасной книги [2] приводят в разделе, посвященном обобщению и уточнению неравенства [4], лишь один результат [2, с. 47], который вряд ли вызовет большой восторг у читателя, и не приводят никаких доказательств, считая, видимо, доказательства из цитируемых четырёх работ недостаточно поучительными и элегантными, чтобы серьёзно конкурировать с приведенными в этой книге двенадцатью доказательствами неравенства (4). Что ж, авторы обзорных монографий могут позволить себе роскошь отбирать только самое лучшее! Монография [5] содержит значительно больше результатов, обобщающих и уточняющих неравенство (4), но они не оставляют впечатления чего-то эффективного, могущего найти нетривиальные приложения в обозримом будущем. Но, самое главное, этим обобщениям не хватает трудно поддающейся определению, но весьма определённо ощущаемой математической элегантности, которая делает математический результат запоминающимся надолго и без всяких усилий.

В настоящей статье мы предлагаем новое обобщение неравенства Коши (4), надеясь, что оно окажется достаточно неожиданным и привлекательным, чтобы быть достойным внимания читателя. Мы намереваемся пройти вместе с читателем от первоначальной догадки через стадию поисков доказательств, рассмотрения частных случаев и обобщений до формулировки исчерпывающего доказательства предполагаемого результата. Сохраняя первоначальную «непричёсанную» последовательность размышлений и событий, мы хотим сделать читателя не только свидетелем, но и соучастником маленького математического открытия. Надеемся, что это будет поучительно и интересно в той мере, которая оправдывает неизбежное увеличение объёма статьи по сравнению со схемой: лемма — теорема — следствие.

Первоначальная идея очень проста, как это часто бывает. Далее везде для простоты мы будем рассматривать лишь правостороннее неравенство в (4), ибо составляющие результаты для левостороннего неравенства в (4) легко получаются заменой $a_i = x_i^{-1}$, где x_i и, следовательно, a_i — произвольные положительные числа и $1 \le i \le n \in N$. Начнём с того, что A_n в правой части неравенства (4) можно тождественно представить как среднее арифметическое арифметических средних:

$$G_n \le \frac{A_n + A_n + \ldots + A_n}{n}. \qquad (5)$$

Если мы теперь одно из A_n в правой части неравенства (5) заменим на G_n, то в силу неравенства (1) это должно усилить неравенство (5) при условии, что получившееся неравенство будет истинным. Не так ли? Ответ несколько неожиданно оказывается отрицательным. Получившееся неравенство будет истинным:

$$G_n \le \frac{(n-1)A_n + G_n}{n} \Leftrightarrow G_n \le A_n, \qquad (6)$$

но обобщение не состоялось! Читатель легко проверит, что если заменить не одно, а m $(1 \le m < n)$ A_n на G_n в правой части неравенства (5), то всё равно полученное неравенство окажется эквивалентным исходному. Что же делать? По-видимому, требуются более решительные действия, и неравенство (4) ясно подсказывает, какие: надо заменить одно из A_n в правой части неравенства (5) на H_n и посмотреть, что будет:

$$G_n \le \frac{A_n + A_n + \ldots + A_n + H_n}{n}.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{nG_n \le (n-1)A_n + H_n}. \qquad (7)$$

Если неравенство (7) окажется истинным, то оно несомненно будет обобщением неравенства (1):

$$G_n \le \frac{(n-1)A_n + H_n}{n} \le$$

$$\le \frac{(n-1)A_n + A_n}{n} = A_n. \qquad (8)$$

Прежде, чем пытаться доказать неравенство (7) для $\forall n \in N$, рассмотрим частные случаи. При $n = 2$ неравенство (7) принимает вид

$$2\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}, \qquad (9)$$

и классического неравенства Коши

$$a + b \ge 2\sqrt{ab} \qquad (10)$$

оказывается вполне достаточно, чтобы доказать неравенство (9):

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \ge 2\sqrt{\frac{(x_1 + x_2)\cdot 2x_1 x_2}{2(x_1 + x_2)}} = 2\sqrt{x_1 x_2}. \qquad (11)$$

Ситуация несколько сложнее в случае $n = 3$:

$$3\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \le \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} =$$

$$= \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{3x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}. \qquad (12)$$

Предоставляем читателю убедиться в бесплодности попыток применить неравенство (1) к правой части неравенства (12), чтобы получить оценку снизу, представленную в левой части неравенства (12). Почему так? Причин тут две. Заметим, что в случае равенства всех x_i:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a \tag{13}$$

слагаемые в правой части неравенства (9) оказываются равными:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = a, \tag{14}$$

в то время как слагаемые в правой части неравенства (12) не равны между собой:

$$\frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = 2a,$$

$$\frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1} = a. \tag{15}$$

Теперь понятно, почему неравенство (10) «не срабатывает», понятен и выход из этого положения: необходимо разбить сумму в правой части неравенства (12) на три слагаемых, принимающих равные значения в случае равенства всех x_i (13), и вместо неравенства Коши для двух неотрицательных чисел использовать неравенство Коши для трёх неотрицательных чисел:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}. \tag{16}$$

Получаем:

$$\frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1} \geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}}. \tag{17}$$

Но и это, конечно, не всё. В отличие от случая $n = 2$ нам необходимо вспомогательное неравенство (лемма), и понятно, какое:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) =$$

$$= 3x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \Leftrightarrow \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geq 0. \tag{19}$$

Конечно, такое красивое и простое неравенство, как (18), доказываемое к тому же «в одну строчку», должно быть хорошо известно [6, с. 80].

Складывается впечатление, что доказательство, построенное по описанной выше схеме, должно «пройти» и в общем случае неравенства (7). Действительно, мы можем применить неравенство Коши для n положительных чисел (сравни с (10) и (16)):

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1} + C_n \geq n(C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n)^{\frac{1}{n}} \tag{20}$$

к правой части неравенства (7)

$$(n-1)A_n + H_n = A_n + \ldots + A_n + H_n \geq n\left(A_n^{n-1}H_n\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= n\left[\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1}}{n^{n-2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{21}$$

Чтобы получить оценку снизу в виде

$$nG_n = n(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}, \tag{22}$$

совпадающую с левой частью неравенства (7), теперь совершенно понятно, какая лемма нам нужна:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1}}{n^{n-2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)} \geq x_1x_2\ldots x_n \tag{23}$$

в общем случае произвольного $n \in N$. Итак, всё свелось к доказательству неравенства (23) и если мы преуспеем в этом, то неравенство (7) будет доказано с помощью неравенства Коши (21), обобщением которого оно, в свою очередь, является (см. (8)). Вся новая по сравнению с неравенством Коши информация содержится во вспомогательном неравенстве (23). Займемся же им.

ЛЕММА. Для любых положительных x_i, $1 \leq i \leq n$ $(i, n \in N)$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1} \geq n^{n-2}\prod_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right), \tag{24}$$

причём равенство возможно тогда и только тогда, когда все x_i равны.

Отметим, что при $n = 1$ и $n = 2$ неравенство (24) становится тождеством и что мы уже доказали неравенство (24) (см. (18) и (19)) для $n = 3$. Для доказательства неравенства (24) в общем случае обозначим какое-либо из чисел x_i, например x_n, через x и рассмотрим функции:

$$f_1(x)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i+x\right)^{n-1} \tag{25}$$

и $$f_2(x)=n^{n-2}\left(\prod_{i=1}^{n-1}x_i\right)x\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i+x^{-1}\right)=$$

$$=n^{n-2}\left(\prod_{i=1}^{n-1}x_i\right)\left\{x\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i}+1\right\} \tag{26}$$

на полубесконечном интервале $0<x<\infty$. Функция $f_1(x)$ монотонно возрастает на этом интервале и выпукла вниз ($f_1'(x)>0,\ f_1''(x)>0$), её график представлен на *рисунке 1*. Выберем точку

$$x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}x_i}{n-1} \tag{27}$$

и запишем уравнение касательной к графику функции $f_1(x)$ в точке $x=x_0$:

$$y_0=f_1(x_0)=\left(\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-1},$$

$$f_1'(x_0)=(n-1)\left(\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-2}, \tag{28}$$

$$y_t(x)=(n-1)\left(\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-2}x+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-1}. \tag{29}$$

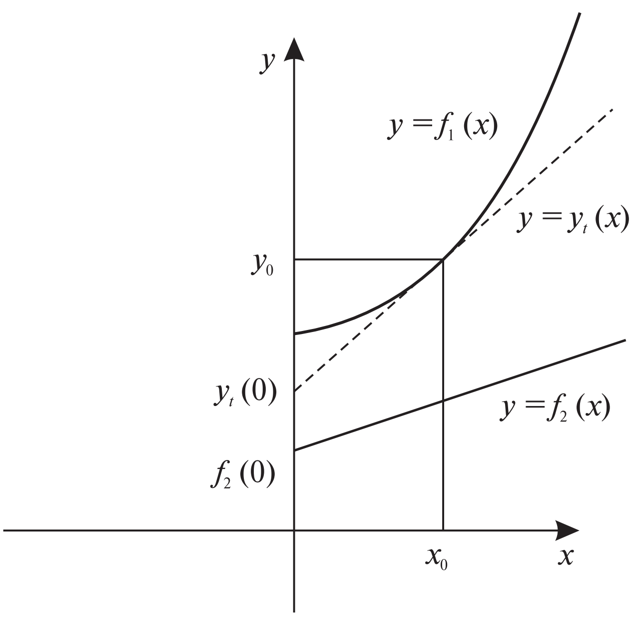

Рис. 1

В силу выпуклости графика функции $f_1(x)$ кривая $y=f_1(x)$ лежит выше прямой (29) за исключением единственной точки — точки касания (27):

$$f_1(x)\ge y_t(x). \tag{30}$$

Касательная $y=y_t(x)$ пересекает ось OY в точке с ординатой

$$y_t(0)=\frac{n^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-1}. \tag{31}$$

Функция $y=f_2(x)$ — линейная функция, монотонно возрастающая на R, её графиком является прямая (см. рис. 1), пересекающая ось OY в точке с ординатой:

$$f_2(0)=n^{n-2}\prod_{i=1}^{n-1}x_i. \tag{32}$$

Достаточным условием выполнения неравенства (24), которое в наших обозначениях принимает вид

$$f_1(x)\ge f_2(x), \tag{33}$$

при $\forall x\in R^+$ является следующее: прямая $y=y_t(x)$ должна лежать над прямой $y=f_2(x)$ при всех положительных x или совпадать с ней. Этот геометрический факт эквивалентен выполнению двух условий, просто формулируемых аналитически (см. также рис. 1):

Условие 1

$$y_t(0)\ge f_2(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\ge(x_1x_2\ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{n-1}\ge G_{n-1}. \tag{34}$$

Но это классическое неравенство Коши, которое, безусловно, верно!

Условие 2

Наклон прямой $y=y_t(x)$ должен быть больше или равен наклону прямой $y=f_2(x)$, то есть

$$y_t'(x)\ge f_2'(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-2}\ge(n-1)^{n-3}\prod_{i=1}^{n-1}x_i\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i}\right). \tag{35}$$

Но (35) — это буквально наше доказываемое неравенство (24) для случая $k=n-1$ положительных чисел x_i. Последнее означает, что из справедливости неравенства (24) для $k=n-1$ вытекает его справедливость для $k = n$, таким образом неравенство (24) доказано методом математической индукции.

Очень просто проанализировать необходимые и достаточные условия превращения неравенства (24) в равенство. Действительно, нам удалось доказать, что

$$f_1(x) \geq y_t(x) \geq f_2(x). \qquad (36)$$

Для того чтобы второе из неравенств в (36) стало равенством, необходимо (см. (34)), чтобы

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}, \qquad (37)$$

так как в этом, и только в этом случае неравенство Коши превращается в равенство.

Первое из неравенств в (36) становится равенством лишь в одной точке (см. рис. 1) — точке касания (27), то есть при выполнении условия

$$x_0 \overset{dif}{=} x_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} \overset{(37)}{=} x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}. \qquad (38)$$

Возвращаясь к (21) и (23), мы заключаем, что не только неравенство (24), но и неравенство (7) превращаются в равенства тогда, и только тогда, когда все x_i равны.

Итак, лемма (24), а вместе с ней и неравенство (7), доказаны. Проведём итоги. Нам удалось открыть и доказать для самого общего случая $\forall n \in N$ следующее обобщение неравенства Коши:

$$H_n \leq \frac{(n-1)H_n + A_n}{n} \leq G_n \leq \frac{(n-1)A_n + H_n}{n} \leq A_n. \qquad (39)$$

В доказательстве использованы как само неравенство Коши (4), так и лемма (24), доказанная методом, который мы кратко назовём *анализ + индукция*. Указанный метод, которому присуща также прозрачная геометрическая интерпретация, существенно отличает наше доказательство от различных (очень красивых) индуктивных доказательств неравенства Коши, представленных в книгах [2—5].

Представляет интерес переписать неравенство (39) в другой эквивалентной форме:

$$\boxed{(n-1)(A_n - G_n) \geq (G_n - H_n) \geq \frac{A_n - H_n}{n}}, \qquad (40)$$

в которой, как мы надеемся, оно более приспособлено для возможных приложений. Форма (4) неравенства (39) позволяет сравнить отклонения между средними (A_n, G_n, H_n) одного и того же числа n положительных чисел x_i. Анализ литературы [2—5] позволил нам найти лишь один результат, близкий по смыслу и духу неравенству (40). Это неравенство Якобсталя [2, с. 11 и 12]:

$$n(A_n - G_n) \geq (n-1)(A_{n-1} - G_{n-1}), \qquad (41)$$

которое тоже позволяет сравнить отклонения между средними, но в отличие от неравенства (40) — для различного числа положительных чисел x_i. Неравенству (41) посвящены по крайней мере две статьи [7, 8], причём в книге Д. С. Митриновича и др. [3, с. 125] неравенство (41) приписывается Л. Чакалову без всякой ссылки на Якобсталя. Общим между (40) и (41) является, конечно, и то, что классическое равенство Коши — следствие каждого из них. Беккенбах и Беллман в §13 своей прекрасной книги [2], озаглавленном «Доказательство Якобсталя», в качестве одного из 12-ти доказательств неравенства Коши приводят, по сути, доказательство неравенства Якобсталя, так как неравенство Коши является очевидным следствием неравенства (41). Можно ли считать, что неравенство (40) в чём-то уступает неравенству (41), достаточно ли в нём математической элегантности, чтобы сподвигнуть читателей на поиски нового, отличного от нашего доказательства неравенства (40) и тем самым открыть 13-е доказательство неравенства Коши, конкурентоспособное с двенадцатью доказательствами из книги [2]? Судить читателям.

Литература

1. *Cauchy A. L.* Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, I-re Partie: Analyse Algebrique. — Paris: Debure Freres, 1821.
2. *Bechenbach E. F., Bellman R.* Inequalities. — Berlin: Springer Verlag, 1961.
3. *D. S. Mitrinovich* et al. Elementary Inequalities. — Groningen: Noordhoff, 1964.
4. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. — London: Cambridge University Press, 1934,1951.
5. *D. S. Mitrinovich.* Analytic Inequalities. — Berlin: Springer Verlag, 1970.
6. *Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. — М. : Наука, 1967.
7. *Jacobsthal E.* Uber das Arithmetische und Geometrische Mittel. — Norske Vid. Selsk. Forh (Trondheim), 23(1951)122.
8. *Tchakaloff L.* Sur Quelques Ineqalites Entre la Moyenne Arithmetique et la Moyenne Geometrique // Publications de l'Institut Mathematique — Beograd. — 3(1963)43.
9. *Valson C. A.* La vie et las travaux du Baron Cauchy. — Paris: Gauthier-Villars, 1988.
10. *Белхост Б.* Огюстен Коши. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1997.