ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

ШКОЛЬНИКОВ МЛАДШЕГО И СРЕДНЕГО ВОЗРАСТА

И. П. Белый

В статье предлагаются задачи, для решения которых не применяется алгебраический аппарат, что дает возможность решать их с учениками 4 — 6 классов. Эти задачи можно использовать на уроках, для подготовки детей к олимпиадам, включать в задания разнообразных математических турниров для учеников 4 — 6 классов или даже младших школьников. Оригинальные решения делают эти задачи привлекательными для занятий математических кружков, факультативов и т. п.

Задачи на подсчет геометрических фигур

1. На бумаге в клеточку начертили прямоугольник 8 × 12 клеточек (*рис. 1*). Сколько образовалось прямоугольников?

Решение

В каждой горизонтальной полосе

$$1+2+\ldots+11+12=\frac{(12+1)\cdot 12}{2}$$

прямоугольников. В каждой вертикальной полосе

$$1+2+\ldots+7+8=\frac{(8+1)\cdot 8}{2}$$

прямоугольников.

Всего

$$\frac{(12+1)\cdot 12}{2}\cdot\frac{(8+1)\cdot 8}{2}=2808$$

прямоугольников.

Ответ. 2808 прямоугольников.

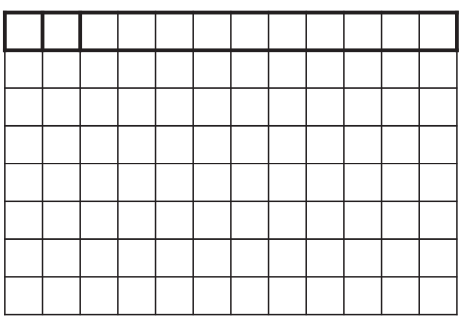

Рис. 1

2. На бумаге в клеточку начертили прямоугольник $m\times n$ клеточек. Сколькими способами можно из этой фигуры вырезать прямоугольник?

Ответ. $\frac{m(m+1)n(n+1)}{4}$ способами.

3. На бумаге в клеточку начертили квадрат со стороной 5 клеточек (*рис. 2*). Сколько образовалось квадратиков?

Решение

Квадратиков со стороной 1 клеточка образовалось 5×5 (5 по горизонтали и 5 по вертикали). Квадратиков со стороной 2 клеточки образовалось 4×4. И так далее. Всего образовалось

$$5^2+4^2+3^2+2^2+1=55$$

квадратиков.

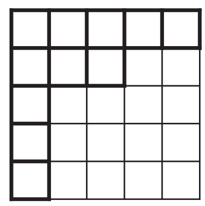

Рис. 2

Ответ. 55 квадратиков.

4. Сколькими способами из квадрата со стороной 5 клеточек можно вырезать прямоугольник, который не является квадратом?

Решение

Из квадрата со стороной 5 клеточек можно вырезать 55 квадратов. А всего прямоугольников (вместе с квадратиками)

$$\frac{5(5+1)5(5+1)}{4}=225.$$

Таким образом, прямоугольников, которые не являются квадратами, $225-55=170$.

Ответ. 170 способов.

5. Сколько квадратиков изображено на *рисунке 3*?

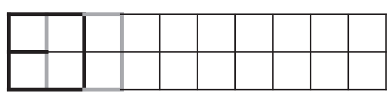

Рис. 3

Решение

На рисунке изображено 20 квадратиков со стороной, равной одной клеточке. Квадратиков со стороной 2 клеточки на рисунке изображено 9. Всего $20+9=29$ квадратиков.

Ответ. 29 квадратиков.

6. Сколько квадратиков ограничено линией на *рисунке 4*?

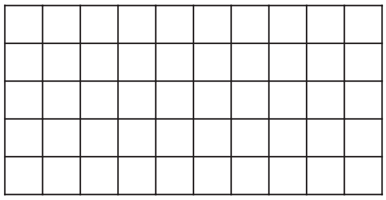

Рис. 4

Решение

Квадратиков со стороной 1 клеточка 10×5=50.

Квадратиков со стороной 2 клеточки 9×4=36 (девять по горизонтали и четыре по вертикали). Аналогично, квадратиков со стороной 3 клеточки 8×3=24, со стороной 4 клеточки 7×2=14; со стороной 5 клеточек 6×1=6. Значит, всего $50+36+24+14+6=130$ квадратиков.

Ответ. 130 квадратиков.

7. Сколько четырехугольников изображено на *рисунке 5*?

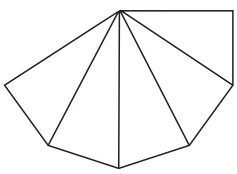

Рис. 5

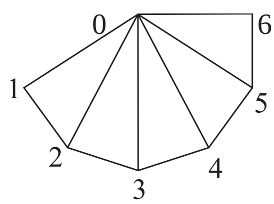

Рис. 6

Решение

Пересчитаем все четырехугольники (рис. 6): 0123, 0234, 0345, 0456.

Ответ. 4 четырехугольника.

Замечание. Не ограничивайте себя и детей в обозначениях. Обратите внимание на комбинации чисел.

Задачи на проценты

1. Участнику олимпиады сразу начисляется 100 баллов. За каждую правильно решенную задачу количество баллов увеличивается на 10 %, а за неправильно решенную задачу уменьшается на 10 %. После решения нескольких задач участник олимпиады набрал 80,19 баллов. Сколько задач он решил правильно?

Решение

Увеличение величины на 10 % равносильно умножению ее на $\frac{11}{10}$, а уменьшение на 10 % — умножению на $\frac{9}{10}$. Поскольку $80{,}19=100\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}$, то правильно решена одна задача.

Ответ. 1 задачу.

2. В магазине модной одежды существует правило, по которому непроданная единица товара становится дешевле в 2 раза через каждые полгода. Сколько месяцев должен быть непроданным товар, чтобы он стоил не больше 10 % своей начальной стоимости?

Решение

Пусть a — начальная стоимость товара. Тогда через полгода он будет стоить $a\cdot\frac{1}{2}$, а еще через полгода — $a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. По условию товар должен стоить не больше, чем $a\cdot\frac{1}{10}$, а это возможно, если $a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. Т.е. через 4 полугодия или 24 месяца товар будет стоить меньше 10 % своей начальной стоимости.

Ответ. 24 месяца.

3. Морская вода содержит 5 % соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в ней составило 2 %?

Решение

В 40 кг морской воды содержится чистой соли $40\cdot 0{,}05=2$ кг. Если долить пресной воды, то эти 2 кг соли будут составлять 2 % (по условию). Итак, масса морской и долитой пресной воды вместе составляет $2\cdot 0{,}02=100$ кг. То есть, нужно долить $100-40=60$ кг.

Ответ. 60 кг.

4. Сколько граммов 60-процентного раствора соли можно получить из 300 граммов жидкости, содержащей 40 % соли?

Решение

В 300 г жидкости содержится $300\cdot 0{,}4=120$ г соли. При испарении части жидкости количество соли останется неизменным, то есть, 120 г соли составят 60 % всей жидкости. Таким образом, масса 60-процентного раствора составит $120:0{,}6=200$ г.

Ответ. 200 г.

5. Заработную плату рабочему повысили сначала на 10 %, а потом еще на 20 %. На сколько процентов повысилась заработная плата рабочего по сравнению с начальной?

Решение

Пусть заработная плата составляла a. После повышения на 10 % она составит $1{,}1a$. А после повышения еще на 20 % составит $1{,}1a \cdot 1{,}2 = 1{,}32a$. Т.е., по сравнению с начальной увеличится на 0,32, или на 32 %.

Ответ. На 32 %.

Четность и нечетность чисел

Замечание. Перед тем, как решать предложенные задачи, следует обратить внимание на такую закономерность: четность или нечетность результата сложения или вычитания нескольких чисел зависит от количества нечетных чисел. При четном количестве нечетных чисел результат — четное число; при нечетном количестве нечетных чисел результат нечетный. Количество четных чисел на результат не влияет.

1. Толя и Оля проводят такую игру: между числами 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ставят знак «+» или «—». Если в результате получится четное число, то выиграет Толя, если нечетное, — то Оля. Кто выиграет, если первый ход делает Толя?

Решение

В ряду 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 пять нечетных чисел, поэтому сумма или разность всегда нечетная. Выиграет Оля, независимо от того, кто делает первый ход.

Ответ. Оля.

2. На складе гвозди сохраняются в ящиках по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик выдать 100 кг гвоздей, не раскрывая ящики?

Решение

Необходимо выдать 100 кг гвоздей. 100 — число четное. А среди чисел 16, 17 и 40 есть нечетное число 17. Его надо брать четное число раз: или 2 (тогда $17 \cdot 2 + 40 + 16 = 90$ — не подходит); или 4 (тогда $17 \cdot 4 + 16 \cdot 2 = 100$).

Ответ. Да.

3. Возможно ли разменять монету достоинством 25 копеек на 10 монет по 1 коп и 5 коп?

Решение

10 — четное число.

Сумма четного количества нечетных чисел всегда четное число, а 25 — нечетное число.

Ответ. Нет.

4. Возможно ли квадрат 5×5 заполнить прямоугольниками 1×2?

РАСПИСКА-РАЗРЕШЕНИЕ

Я, ______________________________

учитель (предмет, должность) ______________________________

____

разрешаю печатать мой материал (название) ______________________________

____

в учебно-методическом журнале ______________________________

____

Издательской группы «Основа».

Гарантирую, что этот материал является моей собственной разработкой и не будет передан в другие издательства.

Дата Подпись

АНКЕТА АВТОРА ИЗДАТЕЛЬСКОЙ ГРУППЫ «ОСНОВА»

Фамилия ______________________________

Имя ______________ Отчество ______________

Место работы (полное название учреждения) ______________________________

____

Должность ______________________________

Паспортные данные: серия ______ № ______ выдан ______________

____

Домашний адрес ______________________________

____

Почтовый индекс ______ телефон дом. (____) ______

Телефон служеб. (____) ______ телефон моб. (____) ______

e-mail ______________________________

все поля, обязательные для заполнения

Решение

Прямоугольник 1×2 имеет площадь 2 кв. ед., а квадрат 5×5 — 25 кв. ед.. Суммарная площадь любого количества таких прямоугольников является четным числом, а площадь квадрата — нечетное число.

Ответ. Нет.

5. По кругу расположено 9 чисел: 4 единицы и 5 нулей. Каждую секунду выполняют такую операцию: между соседними числами ставят нуль, если они разные, или единицу, если они равные. Через какое время все числа станут равными?

Решение

Чтобы все числа стали нулями, необходимо, чтобы все пары состояли из разных чисел — нуля и единицы. Расставлено 9 чисел — нечетное количество, значит, такие пары создать невозможно.

Чтобы все числа стали единицами, нужно, чтобы пары состояли из одинаковых чисел — или нулей, или единиц. Но это также невозможно, так как нулей всего 5, а единиц всего 4. Значит, добиться того, чтобы все числа стали равными, невозможно.

Ответ. Такое время не настанет.

Задачи из спичечного коробка

1. Чтобы показать угол, достаточно иметь 2 спички. Как изменится угол, если к его сторонам приложить еще 2 спички так, как показано на *рис. 7*: увеличится на 2°, увеличится в 2 раза или не изменится?

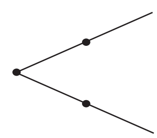

Рис. 7

Ответ. Не изменится.

2. Спичка является хорошей иллюстрацией отрезка. Сколько получится отрезков, если положить в один ряд:

а) 2 спички;
б) 3 спички;
в) 4 спички?

Ответ. а) 3 отрезка; б) 6 отрезков; в) 10 отрезков.

3. Две спички образуют угол. Сколько углов образуют:

а) 3 спички;
б) 4 спички;
в) 5 спичек?

Ответ. а) 3 угла; б) 5 углов; в) 10 углов.

4. Какое наименьшее количество спичек надо взять, чтобы построить прямоугольник?

Решение

С помощью 4-х целых спичек можно построить квадрат (а каждый квадрат - это прямоугольник).

Ответ. 4 спички.

5. Сколько прямоугольников можно составить из шести целых спичек?

Ответ. 1 прямоугольник.

6. Сколько разных прямоугольников можно составить из десяти целых спичек?

Решение

Все спички образуют периметр прямоугольника. Известно, что $p=2(a+b)$. В нашем случае $a+b=5$. Число 5 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел двумя разными способами: $5=1+4$ и $5=3+2$. Значит, прямоугольников будет два.

Ответ. 2 прямоугольника.

7. Сколько разных прямоугольников можно построить из 50 целых спичек?

Решение

Аналогично задаче 6. Число 25 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел двенадцатью разными способами: $25=1+24=2+23=...=12+13$.

Ответ. 12 прямоугольников.

8. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, составленный из 50 спичек? (За единицу измерения площади взять квадрат со стороной, равной 1 спичке.)

Решение

Из 50 спичек можно сложить 12 разных прямоугольников, которые имеют площади 1×24, 2×23, 3×22,... 12×13 (см. задачу 7). Без выполнения вычислений можно утверждать, что наибольшее произведение $12\times13=156$.

Ответ. 156 кв. ед.

Задачи, которые мы привыкли решать с помощью уравнений

1. В пяти ящиках находится одинаковое количество яблок. Если из каждого ящика взять по 60 яблок, то во всех ящиках останется столько яблок, сколько сначала их было в двух ящиках. Сколько яблок было в каждом ящике сначала?

Решение

Понятно, что из всех ящиков забрали $5\cdot60=300$ яблок. Осталось яблок на 2 полных ящика, то есть забрали 3 полных ящика яблок — 300 штук. Значит, в каждом ящике было по 100 яблок.

Ответ. 100 яблок.

2. На одной чаше весов лежит кусок мыла, а на второй — $\frac{2}{3}$ такого же куска мыла и еще 50 г. Весы находятся в равновесии. Какова масса одного куска мыла?

Решение

$\frac{1}{3}$ часть куска мыла имеет массу 50 г, весь кусок в 3 раза больше, т.е. $3\cdot50=150$ г.

Ответ. 150 г.

3. На одной чаше весов лежат 2 куска мыла, а на второй — $\frac{3}{2}$ такого же куска мыла и еще 50 г. Какова масса одного куска мыла?

Решение

Если мыло считать половинами кусков, то на одной чашке весов лежат 4 половины, а на второй — 3 половины и еще 50 г. Значит, одна половина куска мыла имеет массу 50 г, а весь кусок — 100 г.

Ответ. 100 г.

4. В коробке лежали спички. Сначала их количество удвоили, а потом забрали 8 спичек. Оставшееся количество спичек снова удвоили, а потом снова забрали 8 спичек. Когда эту операцию выполнили в третий раз, в коробке не осталось ни одной спички. Сколько спичек было в коробке?

Решение

После выполнения третьей операции в коробке осталось нуль спичек. После выполнения второй операции спичек стало $\frac{0+8}{2}=4$. А после выполнения этой операции впервые в коробке оставалось $\frac{4+8}{2}=6$ спичек. Значит, до начала операций в коробке было $\frac{6+8}{2}=7$ спичек.

Ответ. 7 спичек.

5. В трех ящиках хранятся яблоки. Сколько килограммов яблок в каждом ящике, если в первом и втором вместе 40 кг яблок, во втором и третьем — 30 кг, а в первом и третьем — 44 кг?

Решение

Ящики взвешивали парами, каждый из них ставили на весы дважды. Поэтому $40+30+44=114$ кг — это удвоенная масса яблок. Значит, в трех ящиках было $114:2=57$ кг яблок. Поскольку в первом и втором вместе — 40 кг, то в третьем — $57-40=17$ кг.

Поскольку во втором и третьем вместе — 30 кг, то во втором — $30-17=13$кг. Тогда в первом — $57-(17+13)=27$ кг.

Ответ. 27 кг, 13 кг, 17 кг.

Разные задачи

1. От пяти чемоданов есть пять ключей, но неизвестно, какой ключ от какого чемодана. Сколько попыток придется сделать в наиболее неблагоприятном случае, чтобы открыть все чемоданы?

Решение

Произвольно взятым ключом можно совершить, самое большее, 4 неудачных попытки открыть первые четыре чемодана, пятый чемодан откроется обязательно. Аналогично, вторым ключом можно совершить, самое большее, 3 неудачных попытки, третьим — две, четвертым — одну. Значит, в наиболее неблагоприятном случае может быть $4+3+2+1=10$ попыток.

Ответ. 10 попыток.

2. В классе 29 учеников. 12 учеников имеют хотя бы сестру, 18 учеников имеют хотя бы брата. У Оли, Петра и Николая нет ни брата, ни сестры. Сколько учеников класса имеют и брата, и сестру?

Решение

$29-3=26$ учеников имеют или брата, или сестру, или и брата, и сестру.

$18+12=30$ учеников было бы, если бы у каждого была только сестра или только брат.

$30-26=4$ ученика имеют и брата, и сестру.

Ответ. 4 ученика.

3. Было 9 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 3 части. После этого стало 15 листов. Сколько листов было разрезано?

Решение

При разрезании 1 листа на 3 части общее количество листов увеличивается на 2. Чтобы количество листов увеличилось на 6 $(15-9=6)$, необходимо разрезать 3 листа бумаги.

Ответ. 3 листа.

4. В шахматном турнире принимали участие 8 пятиклассников. Все они между собой сыграли по одной партии. Сколько партий было сыграно во время турнира?

Решение

Каждый участник сыграл одну партию с каждым из остальных участников, т.е. сыграно 8×7 партий. При этом каждая партия считается дважды. Значит, всего сыграно $\frac{8\times7}{2}=28$ партий.

Ответ. 28 партий.

5. Вокруг прямоугольной клумбы имеется дорожка, ширина которой всюду одинакова (*рис. 8*). Внешняя линия дорожки на 8 м длиннее внутренней. Какова ширина дорожки?

Рис. 8

Решение

Чтобы найти длину одной из внешних сторон дорожки, надо длину соответствующей внутренней стороны сложить с удвоенной шириной. Таких сторон четыре, поэтому суммируется 8 «ширин», что составляет 8 м. Значит, ширина дорожки 1 м.

Ответ. 1 м.

6. Чему равна площадь заштрихованной фигуры на *рисунке 9*, если сторона квадрата равна 8 см?

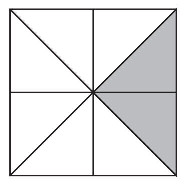

Рис. 9

Решение

Площадь квадрата $8\times8=64$ см^2. Заштрихована четвертая часть квадрата, поэтому ее площадь $64:4=16$ см^2.

Ответ. 16 см^2.

7. Какой цифрой заканчивается произведение всех натуральных чисел от 11 до 19?

Решение

Среди множителей есть хотя бы одно четное число и число, которое заканчивается цифрой 5; их произведение — это число, кратное 10 (или число, в разложении которого на множители есть число 10). А любое число, умноженное на 10, заканчивается цифрой 0.

Ответ. цифрой 0.