РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ: ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ

О. П. Зеленяк

Применённая единожды идея — это искусственный приём, применённая дважды и трижды, она становится методом.

Д. Пойа

«Задачи по стереометрии — прекрасные упражнения, способствующие развитию пространственного воображения, умения логически мыслить, способствующие более глубокому усвоению всего школьного курса математики. *Решение стереометрической задачи чаще всего сводят к решению планиметрических задач.* Поэтому, решая задачи по стереометрии, всё время приходится возвращаться к планиметрии, повторять теоремы, вспоминать формулы, необходимые для решения. При решении стереометрических задач ещё в большей мере, чем в планиметрии, используют средства алгебры и тригонометрии, применяют векторный и координатный методы, дифференцирование и интегрирование. Таким образом, стереометрические задачи способствуют творческому овладению всей совокупностью математических знаний». Цитата приведена из предисловия к пособию [1].

Всецело соглашаясь с автором, акцентируем внимание на большем использовании планиметрических свойств фигур (см. выделенное нами предложение), чем тригонометрии в процессе решения стереометрической задачи.

«Если среди данных или искомых имеются углы, то без использования тригонометрических функций, как правило, не обойтись. Кроме того, применение тригонометрии часто позволяет упростить вычисление» [1, с. 17]. С этим утверждением согласимся частично. «Часто наиболее простое решение удаётся получить, пользуясь способом введения вспомогательных элементов, в частности вспомогательных углов» [1, с. 92]. В последней цитате дополним: или (и) вспомогательных отношений.

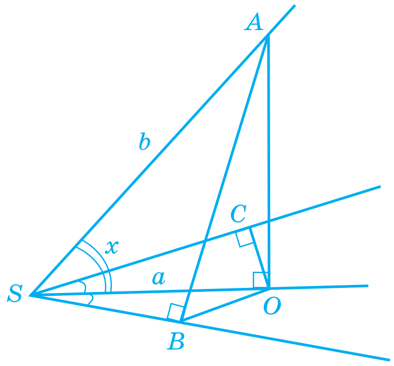
В статье рассмотрены задачи, связанные, в основном, с углами в пространстве. Чем это обусловлено? Во-первых, учащиеся неуверенно решают такие задачи, испытывают затруднения в применении средств тригонометрии и тем более векторов и координат.

Во-вторых, в традиционных решениях задач, связанных с углами в пространстве, тригонометрию используют достаточно широко: теоремы синусов и косинусов и следствия из них, тригонометрические уравнения относительно функции от искомого или вспомогательного угла и т. п. В-третьих, в стереометрии вообще и во время решения задач, связанных с углами, — особенно, необходимо владеть определёнными «сугубо стереометрическими» умениями и навыками. Прежде всего — пространственным воображением. С. И. Шварцбурд, например, в математическом развитии школьника выделял развитие пространственного воображения как одну из главных составляющих. Преобразование тригонометрических выражений не способствует этому. Кроме того, при «тригонометрическом решении» стереометрической задачи многие свойства конфигурации, которые приводят к рациональному решению, могут просто остаться незамеченными.

Рассмотрим метод введения вспомогательного отношения, который можно классифицировать как разновидность метода введения вспомогательного отрезка.

Тригонометрическая функция острого угла прямоугольного треугольника — это соответствующее отношение $\frac{a}{b}$ его сторон. Поэтому, вычислив отношение $\frac{a}{b}$ с использованием подобия, метода площадей, формул для тригонометрических функций кратных углов и т. д., мы находим значение тригонометрической функции, а потом и величину угла с помощью соответствующей обратной функции.

1. Плоские углы трёхгранного угла равны 60°, 60°, 90°. Найти угол между ребром трёхгранного угла и плоскостью противоположного ему прямого угла.



Решение. Пусть

$$\angle ASB = \angle ASC = 60^\circ,\ \angle BSC = 90^\circ,\ AO \perp (BSC).$$

$\angle ASO = x$ — искомый угол. Доказав, что SO — биссектриса плоского прямого угла, и обозначив $SB = y$, находим гипотенузы прямоугольных треугольников с углом 30° и равнобедренного:

$$SA = 2y,\ SO = y\sqrt{2}.$$

Из треугольника ASO:

$$\cos x = \frac{SO}{SA} = \frac{y\sqrt{2}}{2y} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \angle ASO = 45^\circ.$$

Рассмотрим другую запись решения, в которой используются два вспомогательных отрезка, отношение которых является значением тригонометрической функции искомого угла.

Пусть $SO = a$, $SA = b$. Тогда

$$\frac{a}{b} = \cos x.$$

В треугольнике ASB:

$$SB = \frac{a}{\sqrt{2}},\ SA = b,\ \frac{SB}{SA} = \cos 60^\circ.$$

Имеем:

$$\frac{a}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

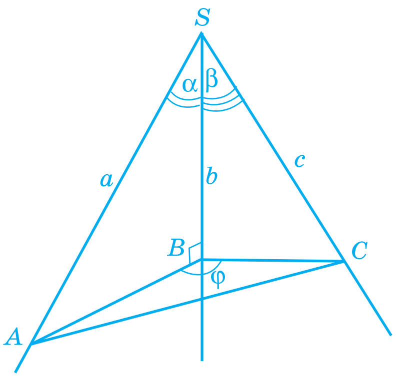
то есть $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\angle ASO = 45^\circ$.

2. Найти двугранные углы трёхгранного угла, зная, что его острые плоские углы равны α, β, γ.

Решение. Пусть S — вершина трёхгранного угла. Проводя плоскость ABC перпендикулярно к ребру, получим линейный угол одного из искомых двугранных углов. Обозначим через α, β, γ плоские углы ASB, BSC, ASC соответственно, φ — линейный угол ABC, мера которого является мерой двугранного угла при ребре SB.

Если $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, то

$$AB = \sqrt{a^2 - b^2},\ BC = \sqrt{c^2 - b^2}.$$



Учитывая, что AC — общая сторона треугольников ASC и ABC, применяя теорему косинусов для этих треугольников и свойство транзитивности, получим:

$$a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\gamma =$$
$$= a^2 + c^2 - 2b^2 - 2\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\sqrt{c^2 - b^2}\cdot\cos\varphi.$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}\cdot\cos\varphi$$

или

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi.$$

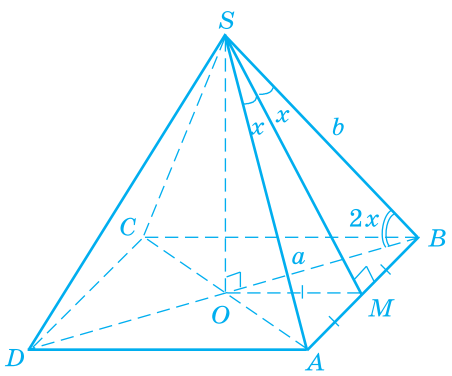
Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Косинусы других линейных углов определяем аналогично.

Примечание. Обязательные в решениях стереометрических задач объяснения построения углов в пространстве, положения основания высоты пирамиды и т. д. предлагаем читателю выполнить самостоятельно.

3. Найти плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды, если он равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. [8, № 12. 270]



Решение. Пусть в пирамиде $SABCD$ SO — высота, SM — апофема, ASB, BSC, DSC, DSA — искомые равные плоские углы. SAO, SBO, SCO, SDO — равны им (по условию), а также равные между собой углы наклона боковых рёбер к плоскости основания.

Введём два вспомогательных отрезка $OB = a$, $SB = b$ и обозначим угол SBO через $2x$. Тогда

$$\frac{a}{b} = \cos 2x.$$

Отношение $\frac{a}{b}$ — вспомогательное и искомое.

$$OM = MB = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \sin x = \frac{MB}{SB} = \frac{a}{b\sqrt{2}}.$$

Формулой косинуса двойного аргумента

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

воспользуемся как уравнением связи.

Имеем:

$$\frac{a}{b} = 1 - 2\cdot\frac{a^2}{2b^2}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cos 2x \quad \left(\frac{a}{b} > 0\right).$$

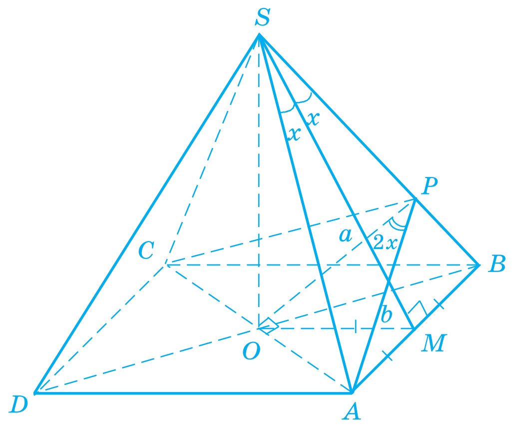
Ответ. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Сформулируем возможный алгоритм решения подобных задач:

1) Ввести отношение $\frac{a}{b}$, обозначив через a и b длины двух вспомогательных отрезков.
2) Выбрать тригонометрическую функцию, значение которой от искомого (заданного или вспомогательного) угла равно $\frac{a}{b}$.
3) Найти уравнение связи, используя соотношение из условия задачи, формулы для тригонометрических функций кратных углов, теорему Пифагора, подобие, метод площадей и т. п.
4) Вычислить $\frac{a}{b}$, решив найденное уравнение, или выразить через $\frac{a}{b}$ степени или члены этого отношения в полученном выражении.

Записать ответ с помощью соответствующей обратной тригонометрической функции или после выполнения соответствующей замены в выражении.

4. Линейный угол двугранного угла, образованного двумя смежными боковыми гранями правильной четырёхугольной пирамиды, в два раза больше плоского угла при вершине пирамиды. Найти плоский угол при вершине пирамиды. [8, № 12. 343]



Решение. Пусть в пирамиде $SABCD$ SO — высота, SM — апофема, ASB — один из четырёх равных плоских углов, APC — линейный угол двугранного угла SB. По условию отношение величин углов APC и ASB равно 2:1. Значит, так же относятся и величины половин этих углов — APO и MSB. Обозначим угол APO через $2x$.

Дальше по алгоритму:

1. $OP = a$, $AP = b$.
2. $\frac{a}{b} = \cos 2x$.
3. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
4. $OA = \sqrt{b^2 - a^2}$,

$$AB = \sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2 - a^2}, \quad \angle BAP = x = \angle BSM.$$

(Указанные углы дополняют угол SBM до прямого.)

Итак,

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{2\left(b^2 - a^2\right)}}.$$

Имеем:

$$\frac{a}{b} = 2\cdot\frac{b^2}{2\left(b^2 - a^2\right)} - 1,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2 - a^2}, \quad \frac{1}{b} = \frac{a}{b^2 - a^2},$$

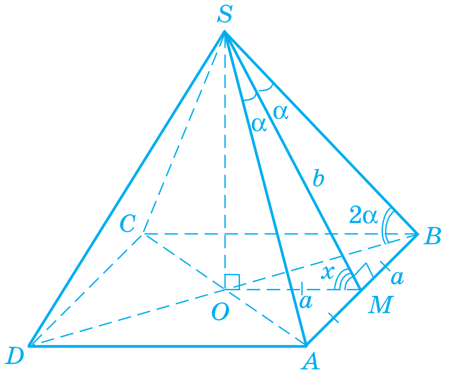
$$ab - b^2 + a^2 = 0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cos 2x.$$

Ответ. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. Величина угла между боковым ребром правильной четырёхугольной пирамиды и плоскостью основания равна величине плоского угла при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания. [8, № 12. 235]



Решение. Пусть в пирамиде $SABCD$ SO — высота, ASB, BSC, DSC, DSA — равные плоские углы, SAO, SBO, SCO, SDO — равные им (по условию) и между собой углы наклона боковых рёбер к плоскости основания. SMO — искомый линейный угол двугранного угла AB, где точка M — середина этого ребра.

Обозначим

$$\angle SBO=\angle ASB=2\alpha,\quad \angle ASM=\angle BSM=\alpha.$$

1. $OM=AM=BM=a,\quad SM=b.$
2. $\frac{a}{b}=\cos x$, где $\angle SMO=x$.
3. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$
4. Выразив из прямоугольных треугольников SMB и SOB $\sin\alpha$ и $\cos 2\alpha$, подставим их в уравнение связи:

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1-\frac{2a^2}{a^2+b^2},\quad \frac{a\sqrt{2}}{1}=\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

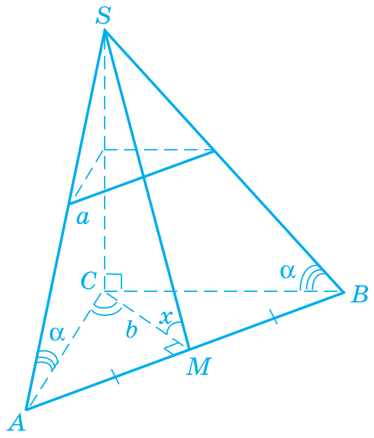
$$2a^2\left(a^2+b^2\right)=\left(b^2-a^2\right)^2,\quad a^4+4a^2b^2-b^4=0.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4+4\left(\frac{a}{b}\right)^2-1=0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\sqrt{5}-2,\quad \frac{a}{b}=\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

Ответ. $\arccos\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

6. Две боковые грани усечённой треугольной пирамиды — равные прямоугольные трапеции с острым углом α и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен β. Найти угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания. [8, № 12. 260]



Решение. Дополним усечённую пирамиду до полной, две боковые грани которой SAC и SBC будут равными прямоугольными треугольниками. Тогда ACB — линейный угол двугранного угла SC величиной β, а SMC — искомый линейный угол двугранного угла AB, где точка M — середина этого ребра.

1. $SC=a,\quad MC=b.$
2. $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}x$, где $\angle SMC=x$.
3. $a=AC\operatorname{tg}\alpha,\quad b=AC\cdot\cos\frac{\beta}{2}.$
4. $\operatorname{tg}x=\frac{a}{b}=\frac{AC\cdot\operatorname{tg}\alpha}{AC\cdot\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}.$

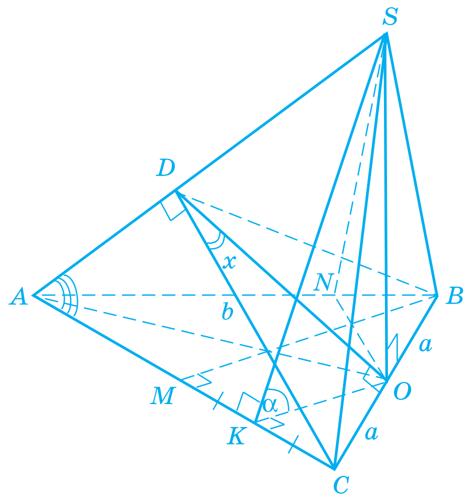
Ответ. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)$.

Примечание. Задачу можно связать с примером [7, с. 295], аналогично записывая решение последнего.

7. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания. Найти косинус угла между двумя другими боковыми гранями, если они образуют с плоскостью основания угол α. [8, № 12. 444]

Решение. В пирамиде $SABC$ $(SBC)\perp(ABC)$, SO — высота, SKO, SNO — равные линейные углы двугранных углов величиной α, BDC — искомый линейный угол двугранного угла SA.

1. $CO=a$, $CD=b$.
2. $\frac{a}{b}=\sin x$, где $\angle ODC=x$ — половина искомого угла.



3. $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.
4. $AB=AC=BC=2a$.

$$BM=a\sqrt{3},\ OK=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ SK=\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha},$$

$$CK=\frac{a}{2},\ AK=\frac{3a}{2}.$$

Чтобы связать вспомогательное отношение $\frac{a}{b}$ с функцией заданного угла α, воспользуемся подобием треугольников ASK и ACD, которые имеют общий острый угол A.

$$\frac{AK}{SK}=\frac{AD}{CD},\ \frac{3a\cdot\cos\alpha}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{b},$$

$$3\cos^2\alpha=\frac{4a^2-b^2}{b^2}.\ 3\cos^2\alpha+1=4\left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(1+\cos 2\alpha)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\cdot\cos 2\alpha.$$

Таким образом,

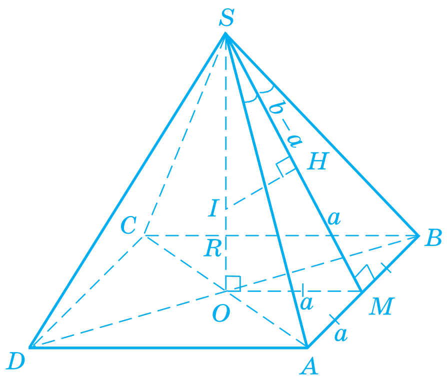
$$\cos 2x=1-2\left(\frac{a}{b}\right)^2=$$

$$=1-\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\cdot\cos 2\alpha\right)=-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\cos 2\alpha\right).$$

Ответ. $-\frac{1+3\cos 2\alpha}{4}$.

8. Плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равен α. Найти боковую поверхность пирамиды, если радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен R. [8, № 12. 358]

Решение. Пусть в пирамиде $SABCD$ SO — высота, ASB — один из четырёх равных плоских углов, SM — апофема, SMO — линейный угол двугранного угла AB, точка I — центр вписанного шара.



По условию

$\angle ASB=\alpha,\ IO=IH=R,\ I\in SO,\ H\in SM.$

1. $MA=MO=a,\ SM=b.$
2. $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \left(\angle ASM=\frac{\alpha}{2}\right)$, то есть вспомогательное отношение известно.
3. $S_{\text{бок}}=4ab=4a^2\cdot\frac{b}{a}$.
4. $SO^2=\sqrt{b^2-a^2}$.

$$\triangle SIH\sim\triangle SMO:$$

$$\frac{SH}{IH}=\frac{SO}{MO};\ \frac{b-a}{R}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a},\ a=\frac{\sqrt{b+a}\cdot R}{\sqrt{b-a}}.$$

$$S_{\text{бок}}=\frac{4(b+a)\cdot R^2}{b-a}\cdot\frac{b}{a}=$$

$$=4R^2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}=4R^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ. $4R^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Окончание в следующем номере.