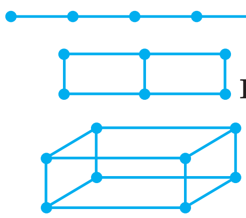
ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

Составитель О. А. Старова

Фигурные числа — это числа, связанные с геометрическими построениями определённого типа. Из фигурных чисел чаще всего рассматривают многоугольные числа. Кроме многоугольных, к фигурным числам относят:

- ✓ линейные — числа, которые не разлагаются на множители, то есть простые числа, дополненные единицей;
- ✓ плоские — числа, которые можно представить в виде произведения двух множителей, отличных от 1 и самого числа: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ...
- ✓ телесные — числа, которые можно представить в виде произведения трёх множителей, отличных от 1 и самого числа: 8, 12, 16, 18, 20, 24, 27, 28, ...



Линейное число 5

Плоское число 6

Телесное число 8

История фигурных чисел

В строительстве сооружений древности — пирамид, дворцов и храмов — применялись плиты и кирпичи, имеющие грани в виде треугольника, четырёхугольника, квадрата и некоторых других фигур. С этими же фигурами человек встречался при межевании и измерении земельных участков. Знакомясь с различными геометрическими фигурами, люди начали подмечать их общие свойства. Так постепенно складывалась геометрия — наука о геометрических фигурах. Геометрия достигла высокого развития в Древней Греции в школе Пифагора (VI–V вв. до н. э.).

Пифагор и его ученики развивали не только геометрию, но и арифметику, причём их учение о числах тесно переплеталось с учением о геометрических фигурах. Пифагорейцы составляли различные фигуры из камешков или костяшек, изображая числа в виде точек, группируемых в геометрические фигуры.

Такое представление чисел облегчало пифагорейцам (ещё раньше — вавилонянам) изучать свойства чисел. Числа, которые можно представить с помощью геометрических фигур, получили название *фигурных.*

Фигурные числа встречаются не только у пифагорейцев, но и других греческих учёных: Эратосфена (III–II в. до н. э.), Никомаха (I–II в.), Диофанта (III в.) и др. Фигурные числа изучали также индийские математики.

Как получают многоугольные числа?

Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ... начинается с единицы; все последующие числа получаются прибавлением к предыдущему числу по единице. Естественно прийти к мысли составить последовательности, начиная с единицы и образуя дальнейшие числа прибавлением к предшествующему числу по 2, по 3, по 4 и т. д. Образуются последовательности:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., n, ...$

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., 2n-1, ...$

$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ..., 3n-2, ...$

$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ..., 4n-3, ...$

$1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, ..., 5n-4, ...$

$1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, ..., 6n-5, ...$

Находя суммы одного, двух, трёх и т. д. чисел этих последовательностей, получим:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... — треугольные числа;

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... — квадратные числа;

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 ... — пятиугольные числа;

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, ... — шестиугольные числа;

1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, ... — семиугольные числа;

1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, — восьмиугольные числа;

…………………………………………………….

С помощью этого правила получают многоугольные числа разных порядков.

Обозначим n-е треугольное число как T_n, квадратное — K_n, пятиугольное — P_n. Тогда формулы для нахождения соответствующих чисел имеют вид:

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1);\ K_n = n^2;\ P_n = \frac{1}{2}n(3n-1).$$

Пользуясь формулой

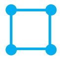
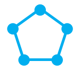
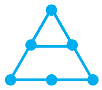
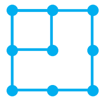
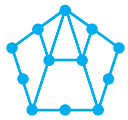
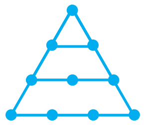
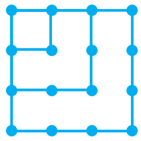
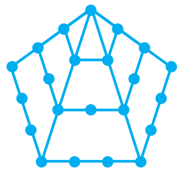
$$F_n^{(k)} = \frac{1}{2}n\big((k-2)n+4-k\big),$$

можно вычислить любое фигурное k-угольное число. Подставляя в эту формулу $k=3,\ 4,\ 5$, мы получим соответственно T_n, K_n, P_n.

Названия многоугольных чисел соответствуют количеству точек, расположенных в форме соответствующих многоугольников.

Многоугольное n-е число изображают в виде соответствующего правильного многоугольника, на стороне которого расположено n точек.

Рассмотрим несколько примеров.

Порядковый номер числа	Вид чисел					
	Треугольные		Квадратные		Пятиугольные	
	Число	Изображение	Число	Изображение	Число	Изображение
$n=2$	3		4		5	
$n=3$	6		9		12	
$n=4$	10		16		22	

Рассматривают и *многоугольные числа неправильных многоугольников.*

Прямоугольное число — это число, являющееся произведением двух последовательных целых чисел, то есть $n(n+1)$ или n^2+n. Таким образом, n-е прямоугольное число — это удвоенное n-е треугольное число или увеличенное на n n-е квадратное число. Очевидно, что все прямоугольные числа — чётные.

Представляют интерес центрированные полигональные числа. Это класс фигурных чисел, каждое из которых сформировано вокруг центральной точки, окружённой слоями многоугольников с постоянным числом сторон. Каждый слой содержит на одну точку больше, чем предыдущий, так что начиная со второго слоя каждый слой k-угольного числа содержит на k точек больше, чем предыдущий.

Например, центрированные шестиугольные числа 1, 7, 19, 37, 61, ... На рисунке изображено центрированное шестиугольное число и показано, что эти числа обладают таким свойством:

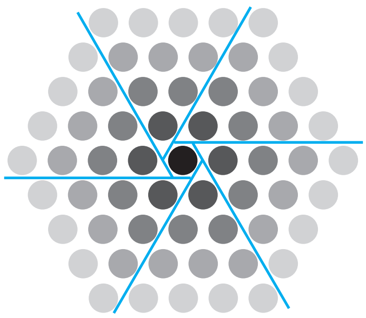


Рис. 1

центрированное шестиугольное число для n на 1 больше, чем шестикратная величина $(n-1)$-го треугольного числа.

Рассматривают также фигурные числа, аналогичные треугольным, в пространстве трёх и большего числа измерений: пирамидальные и т. д. Пирамидальные числа выражают числа шаров, складывающихся в правильные пирамиды.

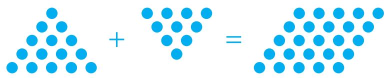
Некоторые свойства фигурных чисел

Греческие математики нашли разные свойства многоугольных чисел, которые в большинстве случаев доказывали геометрически. Выше было показано одно из свойств центрированных шестиугольных чисел. Рассмотрим ещё некоторые примеры таких свойств и их доказательств.

Пример 1. Сумма двух последовательных треугольных чисел — квадратное число.

Например, $3+6=9$, $6+10=16$, $10+15=25$.

Геометрически доказательство этого факта показано на *рис. 2*.



$$a_{n+1} + a_n = (a+1)^2$$

Рис. 2

Пример 2. n-е восьмиугольное число равно сумме шести $(n-1)$-х треугольных чисел плюс n.

Для доказательства достаточно построить чертёж (*рис. 3*) и сказать, подобно индийским руководствам, — смотри!

Многие теоремы о многоугольных числах доказывали Ферма (XVII в.), Эйлер и Лагранж

(XVIII в.), Гаусс (XIX в.) и другие выдающиеся математики. Эти теоремы играют важную роль в теории чисел.

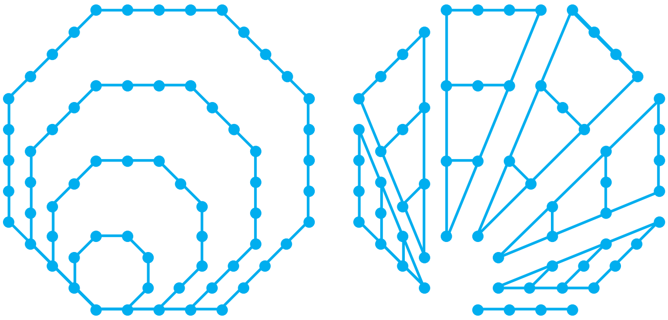


Рис. 3

Самой важной из них является теорема, которую Ферма назвал «золотой».

Всякое натуральное число есть:

- ✓ или треугольное, или сумма двух или трёх треугольных чисел;
- ✓ или квадратное, или сумма двух, трёх или четырёх квадратных чисел;
- ✓ или пятиугольное, или сумма двух, трёх, четырёх или пяти пятиугольных чисел и т. д.

Ферма не смог доказать этой теоремы, вытекающей, по его словам, «из многих крайне сокрытых тайн чисел». Над её доказательством трудились Эйлер, Лагранж, Лежандр и Гаусс. Однако полностью теорема Ферма была доказана французским математиком Коши (1789–1857). Из этой теоремы вытекают многие важные предположения теории чисел.

Фигурные числа и треугольник Паскаля

У европейских математиков фигурными числами называли коэффициенты членов степеней бинома $(a+b)^n$ при $n=1,\ 2\ ,\ 3,\ 4,\ \ldots$:

$$(a+b)^1=1a+1b;$$

$$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2;$$

$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3;$$

$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4.$$

Составим таблицу:

0	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Первый столбец и первая строка представляют 0, 1, 1, 1, ... Второй столбец и вторая строка являются натуральным рядом. Остальные числа таблицы, например, 15 и 20, — суммы чисел, стоящих в той же строке слева и в том же столбце над искомым числом: $15=10+5$, $20=10+10$ и т. д. По косым линиям стоят коэффициенты степеней $(a+b)$.

Эта таблица была у Стифеля в 1544 году, у Паскаля в 1665 году и у нас носит название треугольник Паскаля. В Германии его чаще называют треугольником Стифеля, в Италии — треугольником Тартальи.

Такой числовой треугольник имеется и у Омара Хайяма. Индийские историки математики (в частности, А. Н. Сингх) утверждают, что числовой треугольник был известен в Индии во II в. до н. э. и что об этом в IX в. написал Махавира. Он рекомендует составить числовой треугольник следующим образом.

Составляют треугольник из клеток: сначала чертят одну клетку, под ней — две так, чтобы половины клеток выступали из-под первой. Потом чертят три клетки, чтобы опять половины крайних клеток выступали из-под клеток второго ряда, и т. д. В крайние левые и правые клетки каждого ряда вписывают единицы, в каждую из остальных клеток — сумму чисел, стоящих в двух, находящихся над ней, клетках.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Такое построение числового треугольника является более удобным, чем описанный выше способ Паскаля.

В курсе алгебры числовой треугольник является полезным практическим пособием для составления последовательности коэффициентов членов развёрнутого выражения $(a+b)^n$ при различных значениях n.

Литература

1. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. — М. : Просвещение, 1982.
2. *Депман И. Я.* История арифметики. Пособие для учителей. — М. : Просвещение, 1965.
3. *Математический* энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — М. : Советская энциклопедия, 1988.
4. *Бендукидзе А. Д.* Фигурные числа // Квант. — 1974. — № 6. — С. 53–56.