О ЗАДАЧАХ НА ПОСТРОЕНИЕ

С. Р. Сефибеков, с. Кашкент, Хивский р-н, Республика Дагестан

Что такое задача на построение и её решение

Задачей на построение называют такую задачу, в которой требуется построить с помощью указанных чертёжных инструментов некоторую фигуру, если задана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры.

Решением задачи на построение называют фигуру, удовлетворяющую условиям задачи.

Найти решение задачи на построение — значит свести её к конечному числу основных (элементарных) построений.

Решение сложных задач на построение сводится к элементарным построениям, которые считают известными (указывать, как выполняются элементарные построения, не надо).

К элементарным задачам на построение, которые рассматривают на начальных этапах изучения в школьном курсе геометрии, как правило, относят следующие:

1. Откладывание на прямой отрезка, равного данному.
2. Откладывание от заданной полупрямой в заданную полуплоскость угла, равного данному.
3. Построение прямой, проходящей через данную точку и параллельную данной прямой.
4. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.
5. Деление отрезка пополам.
6. Деление отрезка в заданном отношении.
7. Построение биссектрисы угла.
8. Построение угла, равного данному.
9. Построение треугольника по трём сторонам, по двум сторонам и углу между ними, по стороне и прилежащим к ней углам.
10. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету, по гипотенузе и острому углу, по двум катетам.
11. Нахождение центра построенной окружности.
12. Построение касательной к окружности через заданную на ней точку.

Заметим, что представленный перечень элементарных задач является условным, его можно дополнить.

О числе решений задач на построение

Решить задачу на построение — значит найти все её решения.

Покажем на простейших примерах возможные случаи. Будем пользоваться циркулем и линейкой без делений.

1. Задача имеет одно решение.

Пусть требуется построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе. Таких треугольников на плоскости можно построить множество, и они могут располагаться как угодно, но у всех равны соответственно две стороны — два данных отрезка: гипотенуза и катет, а значит, эти треугольники равны. В этом случае говорят, что задача имеет одно решение «с точностью до равенства». Поэтому достаточно построить один треугольник.

2. Задача имеет конечное число решений.

Пусть требуется построить прямоугольный треугольник, катетом которого служит данный отрезок AC, а гипотенуза равна другому данному отрезку l. В этом случае условие задачи требует определённого расположения искомого треугольника относительно катета AC. Треугольник может оказаться в верхней полуплоскости и в нижней полуплоскости относительно отрезка AC. Поэтому задача имеет два решения: ΔACB_1 и ΔACB_2 (*рис. 1*), причём $\Delta ACB_1 = \Delta ACB_2$.

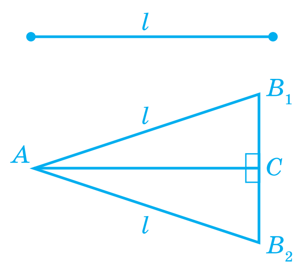

Рис. 1

Важно отметить, что хотя здесь треугольники и равны, мы считаем их разными решениями (поскольку они расположены по-разному относительно отрезка AC).

3. Задача имеет бесконечно много решений.

Такого рода задачи называют неопределёнными. Конечно, мы не можем построить все решения неопределённой задачи. Когда же считают неопределённую задачу решённой? В том случае, когда указаны:

1) приём построения одной из искомых фигур задачи;
2) приём получения других искомых фигур.

Пример. Построить окружность данного радиуса и касающуюся данной прямой.

Решение. Через произвольную точку B прямой l проведём прямую $l_1 \perp l$ (*рис. 2*). Отложим на прямой l_1 от точки B, например, в верхнюю полуплоскость отрезок $BO = r$. Проведём окружность

$$\omega(O; OB = r).$$

Через точку O проведём прямую $l_2 \parallel l$. Замечаем, что при всевозможных положениях точки O на прямой l_2 возникают все решения данной задачи. Задача решена.

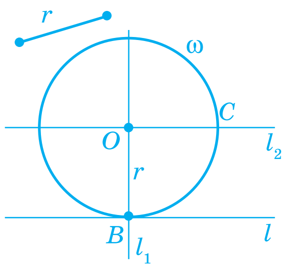

Рис. 2

4. Задача не имеет решений.

Такие задачи называют переопределёнными.

Пример. Построить окружность, проходящую через три данные точки, лежащие на одной прямой.

Если точки лежат на одной прямой, то провести через них окружность нельзя. Следовательно, задача не имеет решения.

5. О расположении данных в задаче ничего не сказано.

В таких случаях задачу считают решённой, если рассмотрены всевозможные случаи расположения данных.

Пример. Провести через данную точку касательную к данной окружности.

Решение. Возможны три случая расположения данных (точки и окружности).

Случай 1. Точка находится вне окружности, но не принадлежит кругу. Здесь можно провести две касательные к окружности.

Случай 2. Точка находится на окружности. Здесь можно провести одну касательную.

Случай 3. Точка находится вне окружности, но принадлежит кругу. Здесь касательную к окружности провести нельзя.

Методика решения сложной задачи на построение

В элементарной геометрии рассматриваются только такие построения, которые могут быть выполнены с помощью циркуля и линейки. Использование чертёжного угольника и некоторых других инструментов хотя и допускается, но не является необходимым.

При решении каждой достаточно сложной задачи на построение возникает вопрос о том, как нужно рассуждать, чтобы отыскать способ решения задачи, чтобы получить все решения, чтобы выяснить, когда задача имеет решение, и т. д. Решение этих вопросов облегчается, если придерживаться определённого плана, схемы рассуждений. Наиболее распространена схема, содержащая четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование.

1. *Анализ.* Предположив, что задача решена, делают от руки чертёж — набросок искомой фигуры и затем, внимательно изучая нарисованную фигуру, стремятся найти такие зависимости между данными задачи и искомыми, которые позволили бы свести задачу к другим, известным ранее. Анализ — это подготовительный, предварительный этап решения задачи на построение. Он имеет своей целью составление плана решения.
2. *Построение.* После того как план составлен, выполняют построение искомой фигуры. Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого его шага.
3. *Доказательство.* Цель доказательства: установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям. Эту часть иначе называют синтезом.
4. *Исследование.* При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причём предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно ещё выяснить следующие вопросы:

а) всегда ли (то есть при любом выборе данных) можно выполнить построение выбранным способом;
б) можно ли и как построить искомую фигуру, если выбранный способ нельзя применить;
в) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных.

Исследование имеет своей целью установить условия разрешимости и определить число решений.

Заметим, что при решении весьма простой задачи нет смысла соблюдать все четыре этапа схемы. В таких случаях опускают анализ и исследование, а указывают построение и приводят доказательство.

Основные методы решения задач на построение

Схемы рассуждений при решении задач на построение не достаточно. Ещё надо знать методы решения таких задач.

Следующие три метода являются главными при решении задач на построение:

- ✓ метод геометрических преобразований;
- ✓ алгебраический метод;
- ✓ метод геометрических мест.

Метод геометрических преобразований

Здесь мы рассмотрим пять видов преобразований. Существуют и другие виды преобразований, но они выходят за рамки школьного курса геометрии.

1. Метод параллельного переноса

Данный метод состоит в том, что некоторые части данной или искомой фигуры (или всю фигуру) перемещают в другое положение, при котором легче обнаружить зависимость между данными и искомыми элементами.

Задача 1. Будем говорить, что сегмент вмещает данный угол, если вершина угла принадлежит дуге сегмента, а его стороны пересекают эту дугу. На данном отрезке AB построить сегмент, вмещающий данный угол α.

Решение

Анализ. Предположим, что задача решена. Пусть сегмент AmB такой, что вмещает угол α (*рис. 3*).

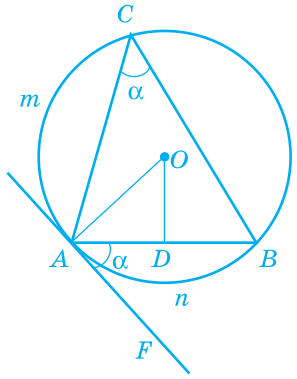

Рис. 3

Проведём касательную AF к окружности в точке A. Тогда угол BAF, образованный касательной и хордой, должен быть равен вписанному углу ACB, поскольку эти углы измеряются половиной дуги AnB. Центр окружности — точка O — должен лежать на серединном перпендикуляре DO к отрезку AB и на перпендикуляре AO к касательной AF.

Построение. При конце отрезка AB (например, в точке A) построим угол BAF, равный α. Из точки A восставим перпендикуляр к AF, а из точки D — середины отрезка AB — перпендикуляр к AB до его пересечения с перпендикуляром к AF в точке O. Построим окружность с центром в точке O и радиусом, равным OA. Получим искомый сегмент AmB.

Доказательство. Сегмент AmB является искомым, поскольку вмещает угол, который измеряется половиной дуги AnB. $\angle BAF = \alpha$ — угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания. Он также измеряется половиной дуги AnB.

Исследование. Мы отложили $\angle BAF = \alpha$ в нижнюю полуплоскость относительно луча AB. Если этот угол отложить в верхнюю полуплоскость относительно луча AB, то получим ещё одно решение. Таким образом, задача имеет два решения.

Задача 2. Построить трапецию по одному её углу, двум диагоналям и средней линии.

Решение

Анализ. Пусть требуемая трапеция $ABCD$ построена (*рис. 4*). Диагонали $AC = d_1$, $BD = d_2$, средняя линия $MN = l$, $\angle BAD = \alpha$.

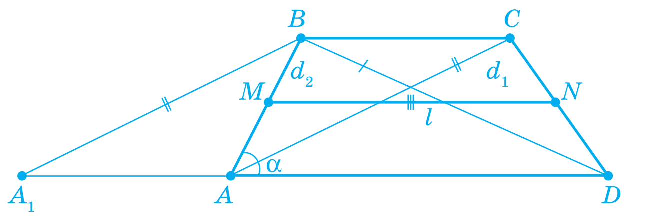

Рис. 4

При параллельном переносе, переводящем точку C в точку B, диагональ AC переходит в отрезок A_1B. Тогда

$$AC = A_1B \text{ и } A_1D = 2MN = 2l$$

(т. к. $A_1A = BC$ и $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$). Таким образом, задача сводится к построению треугольника A_1BD, у которого $A_1B = d_1$, $BD = d_2$, $A_1D = 2l$. Затем найдём точку A как точку пересечения дуги сегмента, построенного на отрезке $BD = d_2$ и вмещающего $\angle A = \alpha$, со стороной $A_1D = 2l$. Чтобы найти вершину C трапеции, проведём из вершины B луч, сонаправленный с лучом AD, и отложим на нём $BC = A_1A$.

Построение

1) Построим треугольник A_1BD, где
$$A_1B = d_1,\; BD = d_2,\; A_1D = 2l.$$
2) На отрезке BD построим сегмент, вмещающий данный угол $\angle BAD = \alpha$ (см. задачу 1), и найдём пересечение дуги этого сегмента — точку A — со стороной A_1D.
3) Из вершины B проведём луч, сонаправленный с лучом AD, и отложим на нём отрезок $BC = A_1A$.

Тогда $ABCD$ — искомая трапеция.

Доказательство. Трапеция $ABCD$ — искомая, поскольку
$$\angle BAD = \alpha,\; AC = A_1B = d_1,$$
$$BD = d_2 \text{ и } MN = \frac{1}{2}A_1D = \frac{1}{2}\cdot 2l = l,$$
т. к.
$$A_1D = A_1A + AD = BC + AD.$$

Исследование. Задача имеет единственное решение, если существует треугольник A_1BD и точка A — внутренняя точка отрезка A_1D. Но треугольник A_1BD существует, когда сумма любых двух сторон больше третьей стороны (две стороны — диагонали, одна сторона — удвоенная средняя линия), а точка A будет внутренней точкой отрезка A_1D, если $\angle BAD = \alpha$ больше, чем $\angle A_1$ (поскольку $\angle BAD = \alpha$ — внешний угол треугольника A_1BA). В противном случае задача решений не имеет.

2. *Метод подобия (или гомотетии)*

Данный метод состоит в следующем: используя некоторые данные задачи вначале строят фигуру, подобную искомой, а затем переходят к искомой. Этот метод особенно удобен тогда, когда одна из данных величин есть длина, а все прочие — или углы, или отношения отрезков.

Задача 3. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания и высоты.

Решение

Анализ. Пусть задача решена и построен искомый треугольник ABC, $\angle ABC = \alpha$,
$$AB = BC, \qquad (1)$$
$$BD + AC = l, \qquad (2)$$
где BD — высота (*рис. 5*).

Отбросим условие (2). Тогда треугольников, удовлетворяющих условию (1), можно построить сколько угодно. Построим один из таких треугольников — ΔA_1BC_1, где
$$A_1C_1 \parallel AC \text{ и } A_1B = C_1B.$$

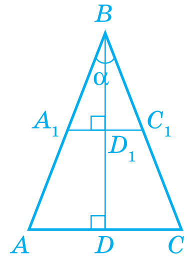

Рис. 5

Из подобия треугольников ABC и A_1BC_1 имеем:
$$\frac{BD_1 + A_1C_1}{BD + AC} = \frac{l_1}{l} = \frac{A_1B}{AB}, \qquad (3)$$
где $l_1 = BD_1 + A_1C_1$.

Далее из (3) определяем отрезок AB, а затем строим искомый треугольник ABC.

Построение

1) Построим произвольный равнобедренный треугольник A_1BC_1, где $\angle B = \alpha$, $A_1B = C_1B$.
2) Пусть $BD_1 + A_1C_1 = l_1$ (l_1 — отрезок, длина которого равна сумме высоты и основания треугольника A_1BC_1). Тогда построим сторону AB искомого треугольника ABC как четвёртую пропорциональную отрезков l_1, l и A_1B.
3) Отложим на лучах BA_1 и BC_1 отрезки BA и BC, равные отрезку AB.
4) Соединим точки A и C.

Тогда треугольник ABC — искомый.

Доказательство. Пусть D — точка пересечения луча BD_1 с отрезком AC. Поскольку
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1,$$
то
$$\frac{BD}{BD_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B} = \frac{l}{l_1}.$$
Поэтому
$$\frac{BD + AC}{BD_1 + A_1C_1} = \frac{l}{l_1}.$$
Но $BD_1 + A_1C_1 = l_1$ по построению. Значит,
$$BD + AC = l.$$
Итак, треугольник ABC удовлетворяет условию (2). Следовательно, треугольник ABC — искомый.

Исследование. Все шаги приведённого построения выполнимы однозначно. Поэтому данный способ построения даёт единственное решение.

Задача 4. Дан угол BAC и внутри него — точка O. Провести через точку O прямую, отрезок MN которой, заключённый между сторонами угла, делится точкой O в отношении $NO : MO = m : n$ (m и n — натуральные числа).

Решение

Анализ. Предположим, что задача решена и прямая MN — искомая (*рис. 6*).

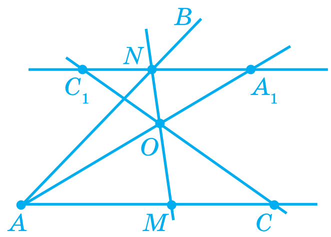

Рис. 6

Поскольку точка O лежит между точками M и N и $NO:MO=m:n$, то точка N получается из точки M гомотетией с центром O и коэффициентом $-\frac{m}{n}$. Но точка M принадлежит прямой AC. Следовательно, точка N принадлежит прямой A_1C_1, в которую переходит прямая AC при рассматриваемой гомотетии ($A_1C_1 \parallel AC$). Поэтому N — точка пересечения прямых AB и A_1C_1.

Построение

1) Выберем на стороне AC угла BAC произвольную точку C.
2) Найдём точки A_1 и C_1, в которые переходят точки A и C при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{m}{n}$.
3) Построим точку N пересечения прямых AB и A_1C_1.
Прямая ON — искомая.

Доказательство. Поскольку $AC \parallel A_1C_1$, то

$$\Delta C_1ON \sim \Delta COM$$

(убедитесь в этом!). Отсюда:

$$\frac{ON}{OM}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{\left|-\frac{m}{n}\right|\cdot OC}{OC}=\frac{m}{n}.$$

Исследование. При любом расположении точки C на стороне AC угла BAC прямая ON определяется однозначно. Поэтому задача имеет единственное решение.

3. Центральная симметрия

При решении задач центральную симметрию часто применяют не к чертежу в целом, а лишь к некоторой его части. При этом приходят к новому чертежу, который может оказаться более удобным для решения задачи, чем исходный.

Задача 5. Дан угол BAC и внутри него — точка O. Провести через точку O прямую, отрезок MN которой, заключённый между сторонами угла, делится точкой O пополам.

Примечание. Данная задача является частным случаем задачи 4 при $m=n$.

Решение

Анализ. Предположим, что задача решена и MN — искомая прямая, $M \in AC$ и $N \in AB$ (*рис. 7*).

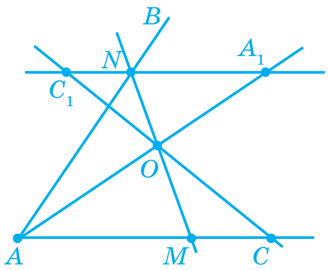

Рис. 7

Поскольку точка O — середина отрезка MN, то точки M и N симметричны относительно точки O. Но точка M принадлежит AC, следовательно, точка N, симметричная точке M, должна лежать на прямой A_1C_1, симметричной AC относительно точки O. Таким образом, точка N должна быть точкой пересечения AB и A_1C_1.

Построение. Пусть C — произвольная точка луча AC. Построим точки C_1 и A_1, симметричные точкам C и A относительно точки O. Проведём прямую A_1C_1 и обозначим через N точку пересечения этой прямой с прямой AB. Тогда прямая ON — искомая.

Доказательство. Четырёхугольник AC_1A_1C — параллелограмм, т. к. $OA=OA_1$ и $OC=OC_1$. Тогда прямая MN, пересекающая стороны этого параллелограмма и проходящая через точку O, — искомая: $OM=ON$ ($N \in AB$, $N \in A_1C_1$, $M \in AC$).

Исследование. При любом выборе точки C на стороне AC угла BAC прямая MN определяется однозначно. Поэтому задача имеет единственное решение.

4. Осевая симметрия

Здесь действуем аналогично случаю центральной симметрии.

Задача 6. Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой a, а две другие — на двух данных окружностях.

Решение

Анализ. Предположим, что задача решена и $ABCD$ — искомый квадрат, точки A и C

лежат на прямой a, точка B — на данной окружности ω_1, а точка D — на окружности ω_2 (*рис. 8*).

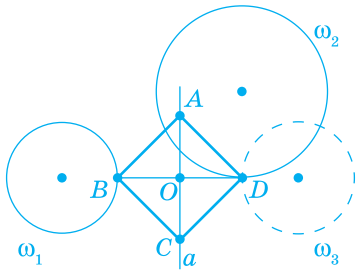

Рис. 8

Поскольку диагонали квадрата пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам, то точки B и D симметричны относительно прямой AC (прямой a). Точка B принадлежит окружности ω_1. Поэтому симметричная ей точка D должна лежать на окружности ω_3, симметричной окружности ω_1 относительно прямой a. Кроме того, точка D лежит и на окружности ω_2, то есть точка D — точка пересечения окружностей ω_2 и ω_3.

Построение

1) Построим окружность ω_3, симметричную окружности ω_1 относительно прямой a. Пусть $D = \omega_2 \cap \omega_3$.
2) Построим точку B, симметричную точке D относительно прямой a, и точку O — точку пересечения отрезка BD с прямой a.
3) Отложим на прямой a по обе стороны от точки O отрезки OA и OC, равные отрезку OD.

Тогда $ABCD$ — искомый квадрат.

Доказательство. Четырёхугольник $ABCD$ — квадрат, поскольку его диагонали равны, перпендикулярны и делятся точкой пересечения O пополам. Точки A и C лежат на прямой a, точка B лежит на окружности ω_1 и точка D лежит на окружности ω_2. Поскольку точка D лежит и на окружности ω_3, то симметричная ей точка B лежит на окружности ω_1.

Исследование. Если окружности ω_2 и ω_3:

а) касаются (имеют одну общую точку), то задача имеет одно решение;

б) имеют две общие точки (как, например, на рис. 8), то задача имеет два решения;

в) не имеют общих точек, то задача решений не имеет;

г) совпадают (когда ω_1 и ω_2 симметричны относительно прямой a), то задача имеет множество решений.

5. Поворот

При использовании данного метода надо учитывать направление поворота. Направление поворота считают положительным, если поворот выполняется против часовой стрелки, и отрицательным — по часовой стрелке.

Задача 7. Даны три параллельные прямые a, b и c. Построить равносторонний треугольник ABC, вершины A, B и C которого лежат на данных прямых.

Решение

Анализ. Пусть задача решена и треугольник ABC — искомый (*рис. 9*).

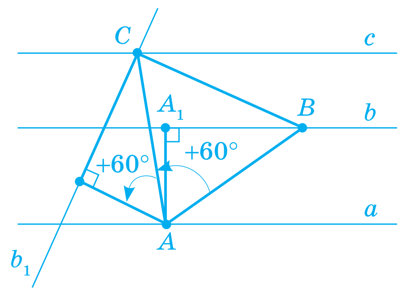

Рис. 9

Поскольку $AB = AC$ и $\angle BAC = 60°$, то точка B переходит в точку C при повороте вокруг точки A на угол $+60°$. Точка B лежит на прямой b, поэтому и прямая b вместе с точкой B будет поворачиваться вокруг точки A на угол $+60°$. Прямая b займёт положение прямой b_1. Кроме того, точка C лежит (по условию) на прямой c. Поэтому точка C есть точка пересечения прямых b_1 и c.

Построение

1) Выберем произвольную точку A на прямой a.
2) Построим прямую b_1 поворотом прямой b вокруг точки A на угол $+60°$.
3) Отметим точку C пересечения прямых b_1 и c.
4) Для получения вершины B искомого треугольника ABC выполним поворот точки C вокруг точки A на угол $-60°$.

Доказательство. При повороте вокруг точки A на угол $-60°$ прямая b_1 переходит в прямую b. Следовательно, точка C прямой b_1 переходит при этом повороте в точку, лежащую на прямой b. Иначе говоря, точка B лежит на прямой b. Далее, по определению поворота, имеем: $\angle BAC = 60°$, $AC = AB$. Значит, треугольник ABC равнобедренный с углом $60°$ при вершине A, следовательно, он равносторонний.

Исследование. Прямая b_1 не параллельна прямой b, поэтому прямая b_1 пересечёт прямую c, параллельную прямой b, в некоторой точке C. Следовательно, треугольник ABC существует. Задача имеет два решения при произвольно выбранной точке A, поскольку можно выполнить и второй поворот прямой b вокруг этой точки — поворот на угол $-60°$ (*рис. 10*).

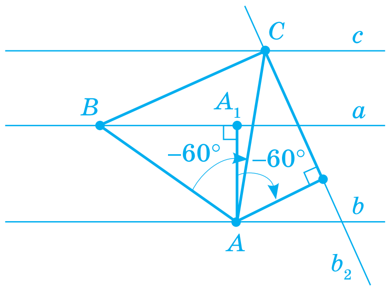

Рис. 10

Алгебраический метод

Суть алгебраического метода заключается в следующем. Решение задачи на построение сводят к построению некоторого отрезка (или нескольких отрезков). Величину искомого отрезка выражают через величины известных отрезков с помощью формулы. Затем строят искомый отрезок по формуле. Таким образом, алгебраический метод решения задач на построение состоит в общем из следующих этапов:

1. Составление уравнения.
2. Решение уравнения.
3. Исследование полученной формулы.
4. Построение по формуле.

Алгебраический метод решения задач на построение привлекателен своей алгоритмичностью и универсальностью. Любая разрешимая задача на построение может быть решена алгебраическим методом. При этом процесс решения почти не отличается от решения обычной задачи на вычисление.

Приведём несколько основных формул (задач), для которых построение выполняется с помощью циркуля и линейки. В этих формулах будем считать, что буквы a, b, c, ... означают величины данных отрезков, а x — величину искомого отрезка.

1. $x=a+b+c$; $x=a-b$; $x=2a$; $x=3a$ ...

Построение по этим формулам не вызывает затруднений.

2. $x=\dfrac{a}{2}$; $x=\dfrac{a}{3}$; ...; $x=\dfrac{2}{3}a$; ...

Построения выполняют делением отрезка a на равные части (по теореме Фалеса) и затем, если требуется, повторением одной части 2, 3, ... раза.

3. $x=\dfrac{ab}{c}$. Данная формула представляет четвёртую пропорциональную к отрезкам a, b и c.

Действительно, из приведённого равенства имеем: $cx=ab$, откуда $c:a=b:x$.

4. $x=\dfrac{a^2}{b}$. Данная формула представляет четвёртую пропорциональную к отрезкам a, b и a.

Действительно, из приведённого равенства имеем: $bx=a^2$, откуда $b:a=a:x$.

5. $x=\sqrt{ab}$. Здесь искомая величина x есть средняя пропорциональная величина a и b. Действительно, имеем: $x^2=ab$, откуда
$$a:x=x:b.$$

Для нахождения искомой величины x используем, например, теорему о перпендикуляре, проведённом из точки окружности к диаметру.

6. $x=\sqrt{a^2+b^2}$. Данная формула выражает гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами a и b.

7. $x=\sqrt{a^2-b^2}$. Данная формула выражает катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и вторым катетом b.

С помощью приведённых формул решают более сложные задачи на построение отрезков.

Задача 8. Построить отрезки, заданные формулами:

а) $x=\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$; б) $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; в) $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$.

Предлагаем читателю выполнить построения самостоятельно или воспользовавшись следующими указаниями:

а) Положить $y=\dfrac{ab}{d}$. Построить отрезок (основная задача 3). Затем построить искомый отрезок по формуле $x=\sqrt{yc}$ (основная задача 5).

б) Положить $a^2+b^2=y^2$.

в) Представить:
$$\sqrt[4]{a^4-b^4}=\sqrt{\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}=\sqrt{yz},$$
где $y=\sqrt{a^2-b^2}$, $z=\sqrt{a^2+b^2}$ (основные задачи 5, 6, 7).

Задача 9. Построить отрезки, длины которых выражаются абсолютными величинами корней квадратных уравнений
$$x^2\pm px\pm q^2=0\ \ (p>0,\ \ q>0).$$

Замечание. Свободный член квадратного уравнения задан в виде q^2 с тем, чтобы все члены уравнения были одного измерения и чтобы абсолютные величины корней можно было строить без введения единичного отрезка.

Решение

Рассмотрим уравнение $x^2 - px + q^2 = 0$. Его корни

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} > 0 \text{ и } x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} > 0$$

(это следует из теоремы Виета), $|x_1| = x_1$, $|x_2| = x_2$. Но корни существуют при

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2 \geq 0,$$

то есть, если $\frac{p}{2} \geq q$.

Пусть

$$y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}.$$

Построим отрезок y (основная задача 7) как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $AB = \frac{p}{2}$ и катетом $BC = q$. Затем построим отрезки $x_1 = \frac{p}{2} + y$ и $x_2 = \frac{p}{2} - y$.

Задача 10. Построить прямоугольник, имеющий периметр $2p$ и равновеликий квадрату со стороной q.

Решение

1. Составим уравнение. Прямоугольник $ABCD$ (*рис. 11*) можно построить, если будут известны его стороны.

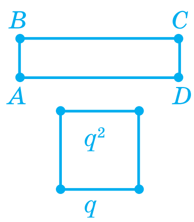

Рис. 11

Пусть $AD = x$. Тогда $AB = p - x$. Составляем уравнение: $x(p - x) = q^2$ или $x^2 - px + q^2 = 0$.

2. Решим уравнение.

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}, \qquad (1)$$

$$x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}. \qquad (2)$$

3. Исследуем полученные формулы (1) и (2). Корни x_1 и x_2 существуют при условии

$$\frac{p}{2} \geq q \text{ и } x_1 > 0, \; x_2 > 0$$

(см. задачу 9).

4. Построение прямоугольника. Определим стороны AD и AB.
Пусть $AD = x_1$ (см. (1)). Тогда

$$AB = p - x_1 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} = x_2.$$

Пусть $AD = x_2$ (см. (2)). Тогда

$$AB = p - x_2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} = x_1.$$

В обоих случаях имеем прямоугольник со сторонами x_1 и x_2. Таким образом, построим отрезки x_1 и x_2 по формулам (1) и (2) (см. задачу 9). Затем построим прямоугольник со сторонами x_1 и x_2.

Метод геометрических мест

По своей универсальности метод геометрических мест ($ГМ$) не уступает алгебраическому. Более того, практически в решении любой задачи на построение в той или иной мере присутствуют элементы $ГМ$.

При решении задач методом $ГМ$ данную задачу сводят к задаче на нахождение точки или нескольких точек, каждая из которых обладает свойствами тех $ГМ$, пересечением которых она является. Затем, чтобы построить искомую точку, сначала строят одно $ГМ$, удовлетворяющее первому условию, а затем — другое $ГМ$, удовлетворяющее другому условию, опуская первое. Точки пересечения построенных $ГМ$, и только они, будут искомыми точками. Отсюда ясно, что метод $ГМ$ применяют в тех случаях, когда задачу можно расчленить на две независимых, каждая из которых в отдельности определяет $ГМ$, построение которого известно.

Простейшая иллюстрация — построение треугольника по трём сторонам. Искомая вершина треугольника определяется как точка пересечения двух окружностей.

Полезно запомнить, например, следующие $ГМ$:

- ✓ Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину ($ГМ_1$).
- ✓ Геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние h, состоит из двух прямых, параллельных данной

и расположенных по обе стороны от неё на расстоянии h ($ГМ_2$).

- ✓ Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых, есть прямая, параллельная этим прямым и расположенная между ними на одинаковом расстоянии от них ($ГМ_3$).
- ✓ Геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки, есть окружность ($ГМ_4$).
- ✓ Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом α, состоит из двух сегментов, которые вмещают в себя угол, равный α, и расположены по разные стороны от данного отрезка ($ГМ_5$).

Задача 11. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и сумме боковых сторон.

Решение

Анализ. Пусть требуется построить треугольник ABC, где основание

$$BC = a,\quad \angle BAC = \alpha,\quad AB + AC = l$$

(*рис. 12*).

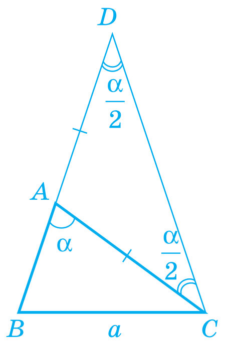

Рис. 12

На луче BA отложим отрезок $BD = l$ и проведём отрезок CD. Тогда треугольник ADC равнобедренный, $AD = AC$ (действительно,

$$AB + AC = l$$

по условию и $BD = AB + AD = l$ по построению). Поскольку $\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD$, то $\angle ADC = \dfrac{\alpha}{2}$. Таким образом, если построить треугольник BDC, то от него легко перейти к искомому треугольнику ABC.

Построение треугольника BDC сводится к нахождению вершины D. Её положение должно удовлетворять двум условиям:

1) она должна быть удалена от вершины B на расстояние l ($ГМ_4$);
2) из неё отрезок BC должен быть виден под углом, равным $\dfrac{\alpha}{2}$ ($ГМ_5$).

Построение

1) Построим отрезок $BC = a$ (*рис. 13*).
2) Построим окружность $\omega_1(B; l)$.
3) На хорде BC строим сегмент, вмещающий угол, равный $\dfrac{\alpha}{2}$.
4) Найдём пересечение дуги сегмента и окружности ω_1 — точку D.
5) Построим треугольник BDC.
6) Найдём вершину A искомого треугольника. Для этого проведём серединный перпендикуляр AE к стороне DC ($A \in BD$). Тогда треугольник ABC — искомый.

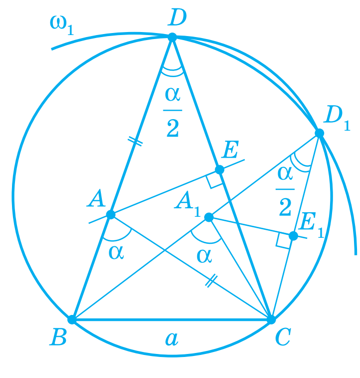

Рис. 13

Доказательство

$$BC = a,\quad AB + AC = l,$$

т. к. треугольник ADC — равнобедренный и

$$\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Исследование. Задача не имеет решений, если $ГМ_4$ и $ГМ_5$ не имеют общих точек; имеет одно решение, если $ГМ_4$ и $ГМ_5$ касаются; имеет четыре решения, если $ГМ_4$ и $ГМ_5$ пересекаются (на рис. 13 показаны два решения: ΔABC и ΔA_1BC; ещё два решения можно получить, если построить сегмент в нижней полуплоскости относительно хорды BC).

Примечание. В приведённых задачах мы указали на построения, но не выполняли сами построения. Выполнение построений оставляем читателю.

Литература

1. *Погорелов А. В.* Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. — 10-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 224 с. : ил.
2. *Сефибеков С. Р.* Несколько вопросов геометрии. — Нижний Новгород : Издательство нижегородского института экономического развития, 1999.