

Задачи графического содержания являются важным средством развития геометрической интуиции. Они помогают более полному изучению основных понятий и теорем анализа, применению их на практике. Но эти задачи еще не получили должного распространения в школьной практике и заложенные в них возможности реализуются частично. Одна из причин такой ситуации — отсутствие необходимого количества задач в действующих учебниках. Предоставить большой «набор» задач с графической нагрузкой — цель этой статьи.

Предлагаются задачи к трем ключевым темам алгебры и начал анализа.

1. Функция

Задачи 1.1–1.8 могут быть использованы во время изучения темы «Применение производной для исследования функции» в 10 классе. Их цель — помочь раскрыть смысл понятий, которые используются при исследовании функций. Задачи условно делятся на две группы. В первой предлагается несколько графиков функций. Необходимо отобрать те, которые соответствуют заданным свойствам. В задачах второй группы, наоборот, нужно выполнить схематический рисунок графика функции с перечисленными свойствами.

Заметим, что задача на построение графика функции по заданным свойствам вообще имеет несколько решений. Для решения такой задачи достаточно лишь построить график одной из функций, удовлетворяющих условию.

Задачи первой группы можно использовать для проведения устной работы, а второй — для письменных работ.

Методика включения задач в учебный процесс:

- 1) Ввести новое понятие.
- 2) Показать его в работе.
- 3) Дать геометрический смысл этого понятия.
- 4) Вывесить таблицы с графиками функций, поставить задачу — выбрать функции с указанными свойствами.
- 5) Убрать таблицы, предложить задание — построить графики функций, которые соответствуют или не соответствуют указанным свойствам.

Как показывает опыт, такая методика включения графических задач в учебный процесс требует много времени, но дает хорошие результаты. Если ученик может самостоятельно построить график функций по указанным свойствам, то это достоверно указывает на уровень осмысления им материала, а не на формальное запоминание.

1.1. Для функций, графики которых показаны на рис. 1, укажите область определения $D(f)$ и множество значений $E(f)$.

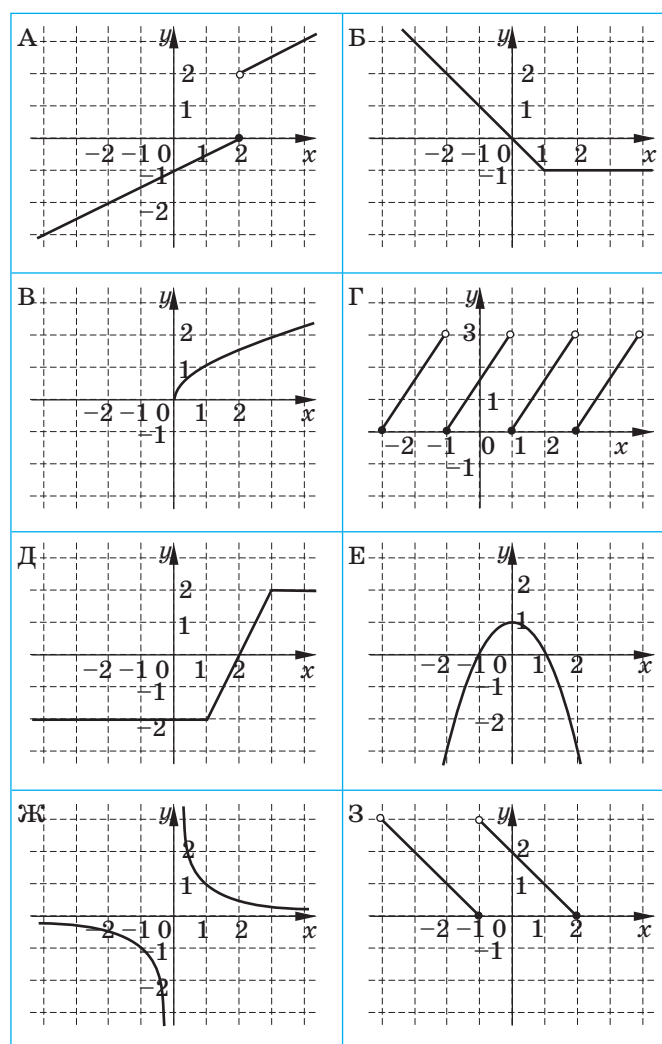


Рис. 1

1.2. На осях Ox и Oy известны отрезки $X=[a;b]$, $Y=[c;d]$. Графически задайте функцию $f(x)$ так, чтобы $D(f)=X$ и $E(f)=Y$.

1.3. Среди функций, графики которых показаны на рис. 1, найдите функции:

- возрастающие на $D(f)$;
- убывающие на $D(f)$;
- неубывающие и невозрастающие на $D(f)$. Укажите для них промежутки убывания и возрастания. Выбор обоснуйте.

1.4. Графически задайте функцию $f(x)$:

- возрастающую на $D(f)$;
- убывающую на $D(f)$;
- неубывающую и невозрастающую на $D(f)$;
- возрастающую на $D(f)$ и $f(x) < 0$ на $D(f)$;
- убывающую на $D(f)$ и $f(x) > 0$ на $D(f)$.

1.5. Среди функций, графики которых показаны на рис. 2, найдите функции:

- четные;
- нечетные;
- которые не являются ни четными, ни нечетными (общего вида). Выбор обоснуйте.

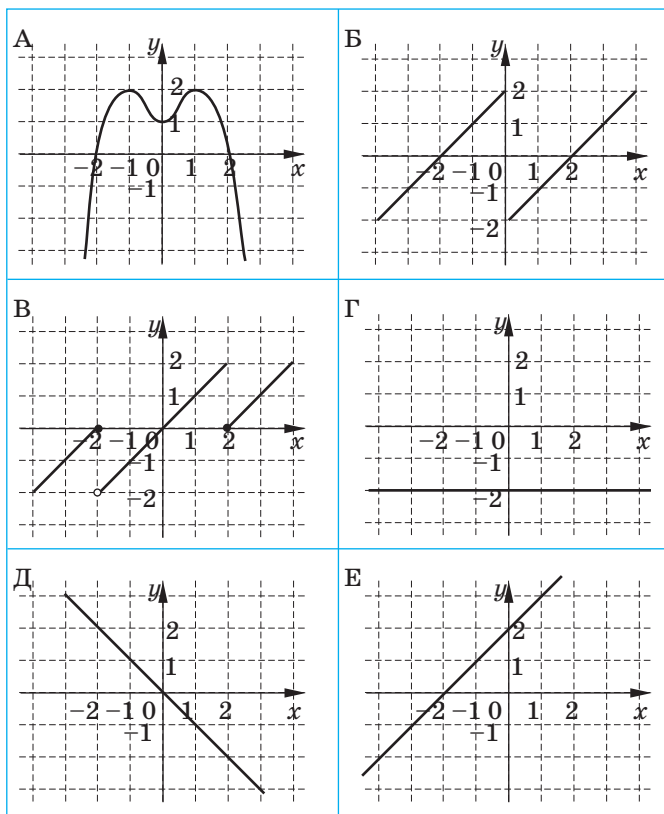


Рис. 2

1.6. Графически задайте функцию $f(x)$:

- четную;
- нечетную;
- общего вида.

1.7. На рис. 3 показана часть графика функции $f(x)$. Достройте для $x < 0$ график функции $f(x)$, если:

- $f(x)$ — четная функция;
- $f(x)$ — нечетная функция.

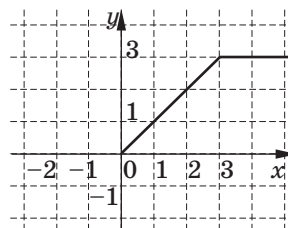


Рис. 3

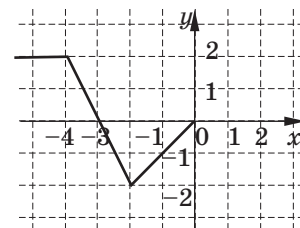


Рис. 4

1.8. На рис. 4 показана часть графика функции $f(x)$. Достройте для $x > 0$ график функции $f(x)$, если:

- $f(x)$ — четная функция;
- $f(x)$ — нечетная функция.

Замечание. Задачи можно усложнить. Например, условие задачи 1.7 может быть таким — графически задайте функцию $f(x)$:

- при $x = -1$ $f(x) = -1$; $f(x)$ — четная;
- при $x = -1$ $f(-1) = 1$; $f(x)$ — нечетная;
- при $x = 1$ $f(1) = 1$; $f(x)$ — ни четная, ни нечетная.

Задачи 1.9–1.10 можно рассмотреть во время изучения понятия периодичности функции (тема «Тригонометрические функции»).

Цель: показать учащимся, что не только тригонометрические функции — периодические.

1.9. На рис. 5 показана часть графика функции $f(x)$. Известно, что функция $f(x)$ периодическая, наименьший положительный период равен 2. Достройте график функции на всей числовой оси.

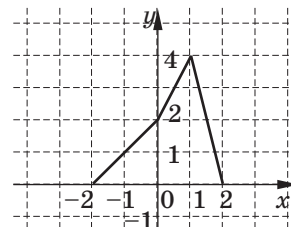


Рис. 5

1.10. Задайте графически пять различных периодических функций с наименьшим положительным периодом, равным:

- а) 1; б) $\frac{3}{2}$; в) 3; г) π ; д) $\frac{\pi}{2}$.

Замечание. Можно подготовить несколько рисунков графиков как периодических, так и непериодических функций и поставить задачу: с помощью определения указать периодические или непериодические функции.

2. Предел и непрерывность функции

Понятие предела функции рассматривается во время изучения темы «Производная» в 10 классе. Ему предоставляется вспомогательная роль: с помощью предела вводится определение производной. Смысл предела можно рассматривать на конкретных примерах с использованием задач с графической нагрузкой.

2.1. По графикам функций

$$f(x) = x - 2; f(x) = x^2; f(x) = \frac{1}{x}; f(x) = \cos x;$$

$$f(x) = \sin x; f(x) = \operatorname{tg} x; f(x) = \operatorname{ctg}(x)$$

установите: имеет ли каждая из них предел в точках $x=1$; $x=0$; $x=-1$. Если да, то чему он равен. Найдите, какие из функций непрерывны в указанных точках.

2.2. Задайте графически функцию $f(x)$ так, чтобы:

- а) $f(x)$ имела предел в точке $x=3$;
б) $f(x)$ не имела предела в точке $x=3$.

2.3. Задайте графически функцию $f(x)$:

- а) непрерывную на $D(f)$;
б) так, чтобы она имела 1–2 точки разрыва на $D(f)$.

3. Производная

Задачи 3.1–3.6 предлагаются для работы над установлением геометрического смысла производной. По графику функции нужно приближенно найти ее производную в заданных точках или, наоборот, построить график функции по указанным свойствам.

Задачи 3.7–3.15 можно использовать во время изучения темы «Исследование функции с помощью производной». В большинстве задач графически задается не функция, а ее производная, нужно восстановить некоторые свойства неизвестной функции. Есть задачи на применение определений и признаков, которые используются в исследовании функции (признаки убывания и возрастания функции; необходимое условие существования экстремума и др.).

3.1. По графикам прямых $y=kx+b$ (рис. 6) найдите их угловые коэффициенты.

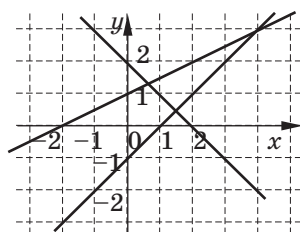


Рис. 6

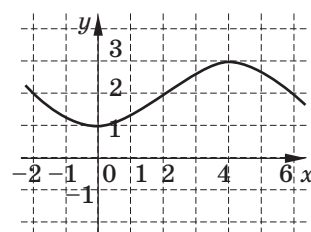


Рис. 7

3.2. По графику функции $f(x)$ (рис. 7) приближенно найдите производную $f'(x)$ при $x=-2$; 0; 2; 4; 6.

3.3. Схематично постройте график функции $f(x)$, для которого выполняются условия:

$$f(0)=1 \text{ и } f'(0)=1; f(1)=0 \text{ и } f'(1)=0;$$

$$f(2)=-1 \text{ и } f'(2)=0.$$

3.4. По графику функции (рис. 8) найдите точки, в которых функция не имеет производной.

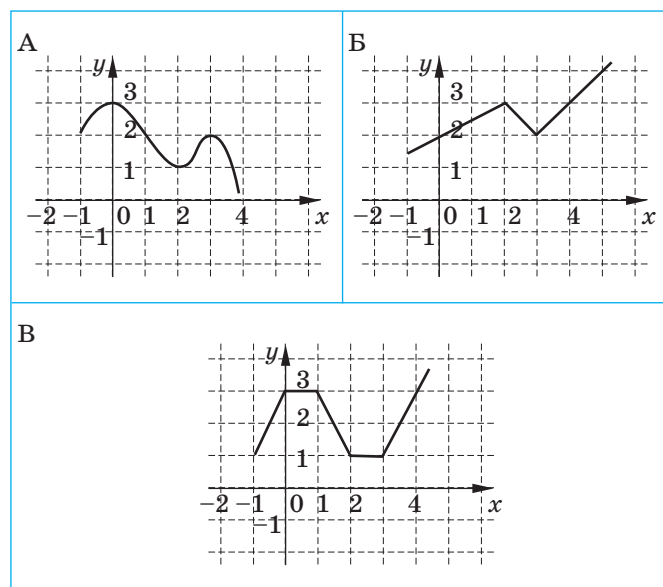


Рис. 8

3.5. Постройте график функции $f(x)$, производная $f'(x)$ которой существует при всех x , кроме $x=1$.

3.6. Постройте график функции $f(x)$, производная $f'(x)$ которой существует при всех x , кроме $x=1$; 0; 2.

3.7. На рис. 8 изображены графики некоторых функций. Найдите для этих функций:

- а) критические точки;
б) точки максимума;
в) точки минимума.

3.8. На рис. 9 изображены графики производных некоторых функций. Найдите для этих функций:

- критические точки;
- точки максимума;
- точки минимума;
- промежутки убывания и возрастания.

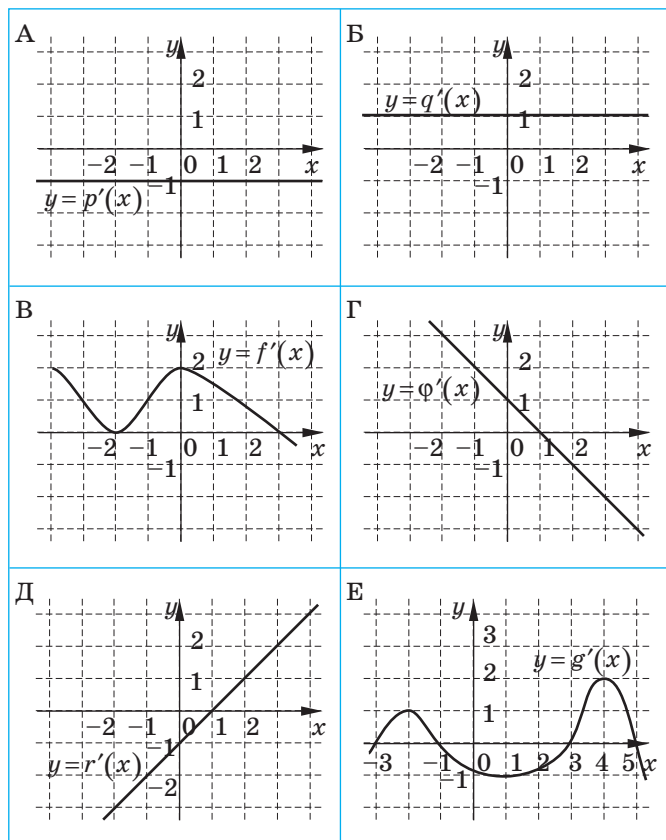


Рис. 9

3.9. На оси Ox задан отрезок $X=[a;b]$. Задайте графически функцию со свойствами (отрезок $X=[a;b]$ — область определения функции):

- функция $f(x)$ имеет на X экстремум (2–3 экстремума);
- функция $f(x)$ имеет на X наибольшее (наименьшее) значение, которое совпадает (не совпадает) с максимумом (минимумом) функции;
- функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x_0 \in X$, но не имеет производной в этой точке;
- функция $f(x)$ имеет критическую точку, но экстремума в ней нет.

3.10. Определив точки минимума функции $f(x)$ по графику ее производной (рис. 10), ученик указал точки $x=1$ и $x=4$. Правильно ли ответил ученик?

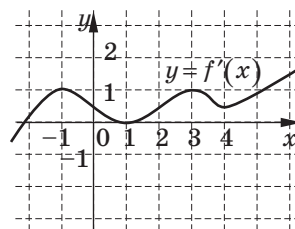


Рис. 10

3.11. Определив точки максимума функции $f(x)$ по графику ее производной (рис. 11), ученик указал точку $x=-2$. Правильно ли ответил ученик?

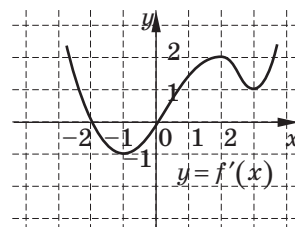


Рис. 11

3.12. Изобразите схематично график функции $f(x)$, у которой:

- $f'(x) > 0$ при $x < 2$ и $f'(x) < 0$ при $x > 2$;
- $f'(x) < 0$ при $x < 2$ и $f'(x) > 0$ при $x > 2$.

3.13. Изобразите схематично график функции $f(x)$, у которой:

- $f'(x) = 1$ для $x \in D(f)$;
- $f'(x) = -1$ для $x \in D(f)$;
- $f'(x) = 0$ для $x \in D(f)$.

3.14. Изобразите схематично график функции $f(x)$, у которой:

- $f'(x) > 0$ для $x \in D(f)$;
- $f'(x) < 0$ для $x \in D(f)$.

3.15. Изобразите схематично график функции $f(x)$, производная которой изменяет знак слева направо по схеме

— + — + — + — .

Литература

- Колмогоров А. М., Абрамов О. М., Дудницын Ю. П. Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учебных заведений. — М.: Просвещение, 1991.
- Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учебных заведений. — М.: Просвещение, 1993.
- Доброхотова М. А., Сафонов А. Н. Функция. Ее предел и производная. — М.: Просвещение, 1970.