

АНТЬЕ И ДРОБНАЯ ЧАСТЬ ЧИСЛА

Составитель О. А. Старова

ЦЕЛАЯ ЧАСТЬ ЧИСЛА, ИЛИ АНТЬЕ

Во многих задачах алгебры, теории чисел, математического анализа, теории вероятностей приходится рассматривать наибольшее целое число, не превышающее данного числа.

Известно, что каждое дробное число можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых — целое число, а другое — неотрицательная правильная дробь. Например,

$$10,2 = 10 + 0,2; \quad \sqrt{2} \approx 1 + 0,41;$$

$$0,3 = 0 + 0,3; \quad -2,5 = -3 + 0,5.$$

Целой частью действительного числа x называют наибольшее целое число n , которое не превышает x . Целую часть числа x обозначают символом $[x]$, где $x = n + q$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq q < 1$. Очевидно, что $[x] = n$. Иногда целую часть числа обозначают символом $E(x)$. Обозначение $[x]$ ввёл Гаусс в 1808 году, а $E(x)$ — Лежандр в 1798 году.

Для любых x выполняется двойное неравенство $[x] \leq x < [x] + 1$.

Формула $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть x , задаёт функцию, область определения которой — множество всех действительных чисел. Эту функцию иногда называют *антье* (от французского entier — целый).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ЧИСЛА

1. Если p — целое число, то $[x + p] = [x] + p$.
2. Для любых действительных чисел x и y выполняется неравенство: $[x + y] \geq [x] + [y]$.

Замечание. Свойство 2 распространяется на любое число слагаемых:

$$[x_1 + x_2 + \dots + x_n] \geq [x_1] + [x_2] + \dots + [x_n].$$

3. Если $[x] = [y]$, то $[x - y] < 1$.
4. Если n — натуральное число, то

$$\left[\frac{[x]}{n} \right] = \left[\frac{x}{n} \right].$$

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = [x]$

Из формул $x = n + q$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq q < 1$ и $[x] = n$ следует:

- если $0 \leq x < 1$, то $y = 0$;
- если $1 \leq x < 2$, то $y = 1$;
- если $2 \leq x < 3$, то $y = 2$;

если $-1 \leq x < 0$, то $y = -1$ и т. д.

Вообще, если $n \leq x < n + 1$, где n — целое число, то $y = n$. На каждом из промежутков $[n; n + 1)$ значение функции y равно n . График функции $y = [x]$ представляет собой множество параллельных отрезков единичной длины, у которых удалены правые концы (см. цветную вкладку).

ПОЛ И ПОТОЛОК

Целую часть числа, или антье называют также *пол*. Наряду с полом существует парная функция — *потолок* — округление x до ближайшего целого числа в большую сторону.

Округлять число x до ближайшего целого в меньшую и большую стороны, называть пол и потолок x и обозначать $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно предложил Кеннет Айверсон в 1962 году.

Кеннет Юджин Айверсон (1920–2004) — канадский учёный в области теории вычислительных систем, программист, автор языка программирования APL, получивший за эту разработку в 1979 году премию Тьюринга Ассоциации компьютерной техники.

В современной математике используются оба обозначения: $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$, однако существует тенденция перехода к терминологии и обозначениям Айверсона.

Таким образом,

$\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, меньшее или равное x :

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z}, n \leq x \};$$

$\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x :

$$\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{Z}, n \geq x \}.$$

Один из способов получить представление о функциях пол и потолок — рассмотреть их графики, которые располагаются «лесенкой» выше и ниже «перил» — прямой $y = x$ (см. рис.).

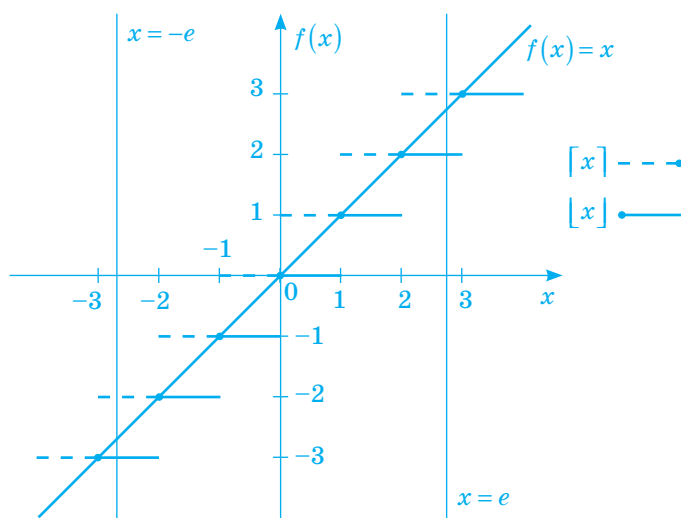
Например, на этом графике видно, что

$$\lfloor e \rfloor = 2, \lceil e \rceil = 3, \lfloor -e \rfloor = -3, \lceil -e \rceil = -2,$$

поскольку $e = 2,71828\dots$

Рассматривая эту графическую иллюстрацию, можно отметить ряд фактов относительно полов и потолков.

Поскольку функция пол лежит на прямой $y = x$ и под ней, то $\lfloor x \rfloor \leq x$; аналогично $\lceil x \rceil \geq x$. (Впрочем, это следует и из определения этих функций.)



В целых точках обе эти функции совпадают: $[x] = x \Leftrightarrow x \text{ — целое} \Leftrightarrow [x] = x$.

(Здесь знак « $\Leftrightarrow$ » подразумевает «тогда и только тогда».) А если они не совпадают, то потолок ровно на 1 выше пола.

Если сдвинуть прямую $y = x$ на единицу вниз, то она целиком окажется под функцией пола, так что $x - 1 < [x]$; аналогично $x + 1 > [x]$. Объединяя эти наблюдения, получим, что

$$x - 1 < [x] \leq x \leq [x] < x + 1.$$

Данные функции являются отражением друг друга относительно обеих осей:

$$[-x] = -[x], \quad [-x] = -[x].$$

Таким образом, каждая из них легко выражается через другую. Это позволяет объяснить, почему функция потолок прежде не имела собственного обозначения. Но потолки встречаются столь часто, что «заслуживают» специальных обозначений. У математиков издавна есть синус и косинус, тангенс и котангенс, максимум и минимум — а теперь у нас есть пол и потолок.

Для того чтобы доказать свойства этих функций, полученные путём анализа графика, полезны следующие правила:

- ✓ $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$;
- ✓ $[x] = n \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x$;
- ✓ $[x] = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n$;
- ✓ $[x] = n \Leftrightarrow x \leq n < x + 1$.

(Во всех четырёх случаях считаем, что n — целое, а x — действительное число.)

АНТЬЕ В ЗАДАЧАХ

Решение уравнений

1. Решить уравнение $\left[\frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}$.

Решение

Пусть

$$\frac{15x-7}{5} = t.$$

Тогда

$$x = \frac{5t+7}{15},$$

и уравнение принимает вид

$$\left[\frac{10t+39}{40} \right] = t.$$

Из определения целой части следует, что

$$0 \leq \frac{10t+39}{40} - t < 1.$$

Решив эти неравенства, находим $-\frac{1}{30} < t \leq 1,3$.

Поскольку t — целое число, то оно может быть либо нулем, либо единицей.

При $t=0$ получаем $x_1 = \frac{7}{15}$, при $t=1$ получаем $x_2 = \frac{4}{5}$.

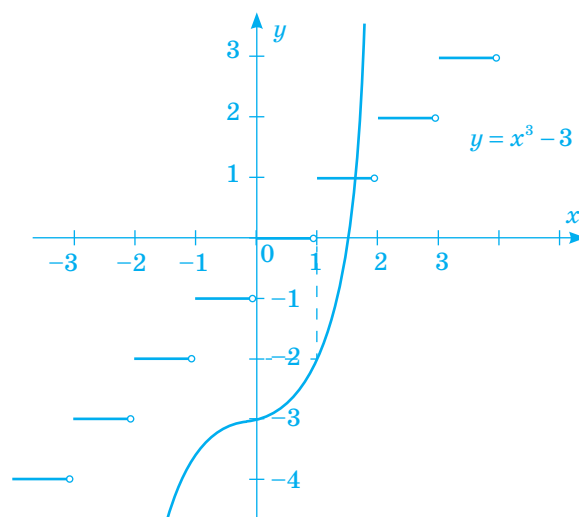
Ответ. $\frac{7}{15}; \frac{4}{5}$.

2. Решить уравнение $x^3 - [x] = 3$.

Решение

Преобразуем уравнение к виду $x^3 - 3 = [x]$ и построим графики функций

$$y = x^3 - 3 \text{ и } y = [x].$$



Поскольку эти графики пересекаются в единственной точке, то уравнение имеет единственный корень. Этот корень заключён между числами 1 и 2. Но если

$$1 < x < 2, \text{ то } [x] = 1$$

и уравнение принимает вид

$$x^3 - 1 = 3,$$

отсюда $x = \sqrt[3]{4}$.

Ответ. $\sqrt[3]{4}$.

ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ

Любое натуральное число m можно, и при этом единственным способом, разложить на простые множители. Очевидно, показатель степени α , с которым простое число p входит в разложение числа m на простые множители: $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ равен максимальной степени числа p , на которую делится m .

Можно доказать, что простое число p входит в разложение числа $n!$ с показателем

$$\alpha = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^{s-1}} \right],$$

где s таково, что $p^{s-1} \leq n < p^s$.

На практике α удобно вычислять так. Пусть

$$\alpha_1 = \left[\frac{n}{p} \right], \alpha_2 = \left[\frac{\alpha_1}{p} \right], \alpha_3 = \left[\frac{\alpha_2}{p} \right], \dots$$

Тогда

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

3. Сколькими нулями заканчивается число 2015!?

Решение

Задача будет решена, если мы найдём, чему равна максимальная степень числа 10, на которую делится 2015!. Но поскольку $10 = 2 \cdot 5$, достаточно подсчитать, в какой степени входит число 5 в разложение на простые множители числа 2015! (понятно, что 2 войдёт в 2015! множителем большее число раз, чем 5). Число 2015 больше, чем 5^4 , но меньше, чем 5^5 . Значит, количество нулей, которыми оканчивается число 2015!, равно

$$\left[\frac{2015}{5} \right] + \left[\frac{2015}{5^2} \right] + \left[\frac{2015}{5^3} \right] + \left[\frac{2015}{5^4} \right] = 403 + 80 + 16 + 3 = 502.$$

Ответ. 502 нулями.

ДРОБНАЯ ЧАСТЬ ЧИСЛА

Дробной частью числа называют разность между этим числом и его целой частью. Дробную часть числа обозначают $\{x\}$. Из определения следует, что $\{x\} = x - [x]$. Например,

$$\{9,7\} = 9,7 - [9,7] = 9,7 - 9 = 0,7;$$

$$\{-2,3\} = -2,3 - [-2,3] = -2,3 - (-3) = 0,7.$$

Таким образом,

$$x = [x] + \{x\}.$$

Формула $y = \{x\}$ задаёт функцию.

Некоторые свойства дробной части числа

1. Область определения функции $y = \{x\}$ — все действительные числа.
2. Область значений функции $y = \{x\}$ — $[0;1)$.
3. Функция $y = \{x\}$ периодична с наименьшим периодом $T = 1$.
4. Если $\{x\} + \{y\} < 1$, то

$$\{x+y\} = \{x\} + \{y\};$$

если $\{x\} + \{y\} \geq 1$, то $\{x+y\} = \{x\} + \{y\} - 1$.

Построение графика функции $y = \{x\}$

Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$, и формула

$$y = x - [x]$$

принимает вид $y = x$, а график функции $y = \{x\}$ — часть прямой $y = x$.

Если $x = 1$, то $y = 1 - 1 = 0$, следовательно, соответствующая точка графика лежит на оси Ox .

Если $1 \leq x < 2$, то

$$[x] = 1 \text{ и } y = \{x\} = x - [x] = x - 1,$$

то есть графиком функции на этом промежутке является часть прямой $y = x - 1$.

Вообще, если

$$n \leq x < n+1,$$

где $n \in \mathbb{Z}$, то $[x] = n$, а

$$y = \{x\} = x - n,$$

то есть на каждом промежутке $[n; n+1)$ графиком функции $y = \{x\}$ является часть прямой $y = x - n$. Таким образом, график функции $y = \{x\}$ состоит из множества равных отрезков, параллельных прямой $y = x$, из которых удалены верхние концы (см. цветную вкладку).

Литература

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.
2. Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г. Математика в понятиях, определениях и терминах. — М.: Просвещение, 1982.
3. Математический энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — М.: Советская энциклопедия, 1988.
4. Мордкович А., Смышляев В. Антье. // Квант. — 1976. — № 5. — С. 43–47.