

К ТЕОРИИ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ФИГУР

Ведущая рубрики А. А. Агафонова

Первые исследования, касающиеся теории наибольших и наименьших фигур, приписывают школе Пифагора. Как и все геометрические исследования древних математиков, они проводились синтетическими методами (то есть без использования алгебры и метода координат). В 1842 году швейцарский математик, основатель синтетической геометрии кривых линий и поверхностей второго и высших порядков Якоб Штейнер в двух мемуарах предложил пять методов для отыскания наибольших и наименьших значений плоских фигур.

В данной статье изложен первый из этих методов — наиболее общий и изящный. Этот метод был опубликован в «Traite de Geometrie». Перевод С. Кричевского был напечатан в журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики» № 81 за 1889 год.

Теоремы, приведённые в статье, и следствия из них могут быть полезны при решении геометрических задач, а также могут быть использованы при изучении темы «Наибольшее и наименьшее значение функции».

Къ теоріи наибольшихъ и наименьшихъ фигуръ.

Первый методъ Штейнера.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 81.

VII Сем.

11 Ноября 1889 г.

№ 9.

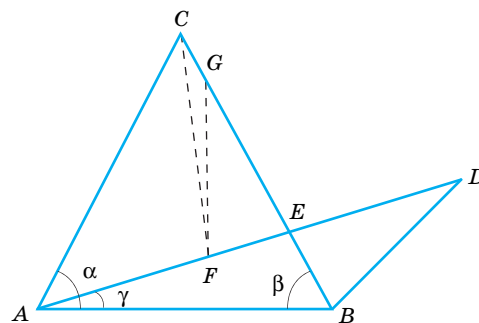
11 Ноября 1889 г.

1. Теорема. Их всех треугольников, имеющих равные периметры и одно и то же основание, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Доказательство

Пусть ADB (рис. 1) — неравнобедренный треугольник, причём

$$AD + DB = AC + CB.$$



Треугольники ACB и ADB имеют общую часть AEB , значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что треугольник BED меньше треугольника AEC .

Если на отрезках EA и EC отложить соответственно

$$EF = EB \text{ и } EG = ED,$$

то останется доказать, что точка F будет расположена между точками A и E , а точка G — между точками C и E .

Точка F будет расположена между точками A и E , поскольку угол β , равный углу α , больше угла γ . Следовательно, $EA > EF$.

Если точка G будет расположена между точками E и C , то

$$FG + GE < FC + CE. \quad (1)$$

Если к обеим частям неравенства (1) прибавить сумму

$$AF + FE,$$

то получим

$$AF + FG + GE + FE < AF + FC + CE + EF. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$EG = ED, \quad FG = BD, \quad EF = EB,$$

неравенство (2) можно записать в виде

$$AD + DB < AF + FC + CB$$

или

$$AC + CB < AF + FC + CB,$$

откуда

$$AC < AF + FC.$$

Это неравенство очевидно, значит, верно и неравенство (1), то есть точка G лежит между точками C и E .

2. Обратная теорема. Из всех треугольников, имеющих одинаковую площадь и одно и то же основание, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

Доказательство

Пусть G — равнобедренный треугольник; U — неравнобедренный треугольник, имею-

щий такую же площадь и то же основание, что и G ; G_1 — равнобедренный треугольник, имеющий то же основание и такой же периметр, что и U .

По доказанному выше $G_1 > U$, то есть $G_1 > G$. Но из двух равнобедренных треугольников, построенных на общем основании, тот, который имеет большую площадь, имеет и больший периметр, поэтому периметр треугольника G_1 , то есть периметр треугольника U , больше периметра треугольника G .

Примечание. В дальнейшем изложении мы не будем приводить доказательств обратных теорем, поскольку они аналогичны только что изложенному.

3. Следствие. Из всех треугольников с равными периметрами наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Действительно, наибольшим из треугольников, имеющих данный периметр, является равнобедренный, какую бы из его сторон мы ни приняли за основание. И наоборот, из всех равновеликих треугольников равносторонний имеет наименьший периметр.

4. Теорема. Из всех треугольников, имеющих две фиксированные стороны, наибольшую площадь имеет тот, в котором эти стороны образуют прямой угол.

Доказательство

Высота, проведённая к одной из данных сторон, меньше второй стороны до тех пор, пока данные стороны не станут взаимно перпендикулярными. Тогда высота, а следовательно, и площадь достигает максимума.

5. Следствие. Из всех треугольников, сумма двух сторон которых является фиксированной, наибольшую площадь имеет тот, в котором эти стороны равны и образуют прямой угол.

Действительно, треугольник, в состав которого входят две стороны, на которые можно разбить данную фиксированную сумму, имеет наибольшую площадь тогда, когда эти стороны взаимно перпендикулярны. Значит, для доказательства утверждения нужно сравнить прямоугольные треугольники, сумма катетов которых является постоянной.

Обозначим один из этих треугольников через P . На его гипотенузе построим равнобедренный треугольник Q , периметр которого равен периметру треугольника P .

Обозначим через R равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны равным сторонам треугольника Q . По первой теореме $P < Q$, а по только что доказанной $Q < R$, значит, $R < P$.

6. Теорема. Из всех плоских фигур, имеющих одинаковый периметр, наибольшую площадь имеет круг.

Доказательство

Площадь фигуры данного периметра можно сделать как угодно малой, но увеличить её бесконечно нельзя, поскольку эта фигура остаётся внутри круга, описанного из какой-либо точки её контура радиусом, равным половине данного периметра.

Значит, в ряду плоских изопериметрических фигур есть или одна наибольшая, или несколько наибольших различной формы.

Кроме того, любая наибольшая фигура данного периметра должна быть выпуклой, иначе можно было бы увеличивать её площадь, не изменяя периметра.

Установив этот факт, обозначим через $EFGH$ наибольшую фигуру, имеющую данный периметр. Любой точке A , произвольно взятой на контуре этой фигуры, соответствует такая точка B этого контура, что прямая AB разделяет периметр фигуры на две равные части. Площади $AEFB$ и $AHGB$ должны быть равными, иначе меньшую из них можно было бы заменить симметричной частью большей, считая прямую AB осью симметрии, и получить целую фигуру, изопериметричную первой, но с большей площадью.

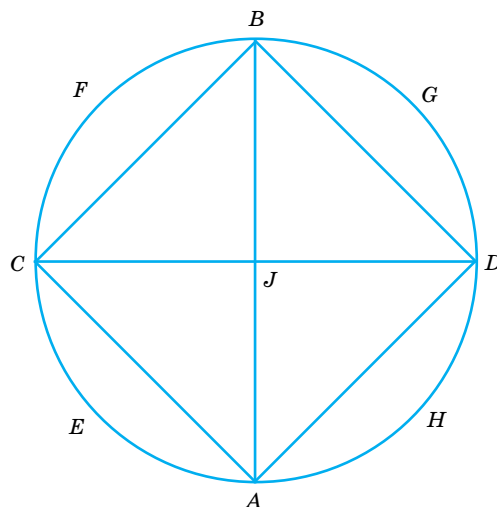
Значит, первая фигура не была бы наибольшей (по площади), что противоречит предположению.

Из этого следует, что если в наибольшей фигуре $EFGH$ данного периметра часть с одной стороны AB заменить частью, симметричной той, которая находится с другой стороны AB , то новая целая фигура будет одной из наибольших. Будем размышлять теперь относительно этой новой фигуры. Предположим, что часть $AHGB$ симметрична $AEFB$ относительно прямой AB (рис. 2).

Пусть C — какая-либо точка контура $AEFB$. Возьмём симметричную ей точку D и проведём прямые CA , AD , DB и BC .

Угол ACB — прямой. Действительно, если бы углы ACB и ADB были бы отличны от прямых, то можно было бы на тех же сторонах CA , AD , DB и BC построить четырёхугольник

$\alpha\beta\gamma\delta$, в котором углы γ и δ были бы прямыми. Этот четырёхугольник был бы больше предыдущего (теорема 4), и, построив соответственно на сторонах $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\beta\delta$ и $\alpha\delta$ сегменты AEC , CFB , BGD и DHA , расположенные теперь на CA , CB , BD и DA , мы получили бы целую фигуру, имеющую тот же периметр, что и фигура $AECFBGDHA$, но большую площадь, и фигура $AECFBGDHA$ не была бы наибольшей, что противоречит предположению.



Таким образом, из всех точек C контура $AECFB$ прямую AB видно под прямым углом, поэтому этот контур является половиной круга, описанного на AB как на диаметре. Значит, если фигура данного периметра является наибольшей, её половина ACB , начинающаяся в какой-либо точке A её контура, является половиной круга, то целой фигурой является круг.

Понятно, что не существует больше одной фигуры, имеющей при данном периметре наибольшую площадь, и этой фигурой является круг.

Штейнер называл эту теорему главной, поскольку её доказательство содержит наиболее необходимые положения многих предложений теории наибольших фигур (плоских или сферических).

7. Теорема. Пусть периметр фигуры состоит из прямой произвольной длины l и линии Z произвольной формы и известна длина линии Z (или площадь фигуры). Тогда фигура имеет наибольшую площадь (или линия Z имеет наименьшую длину), если фигура является половиной круга.

Действительно, любую фигуру, о которой идёт речь в теореме, можно рассматривать как половину симметричной фигуры, для которой прямая l является осью симметрии, а периметр, равный $2Z$, известен. Но площадь половины фигуры принимает наибольшее значение только тогда, когда наибольшее значение принимает площадь всей фигуры. Следовательно, доказываемая теорема является следствием главной.

Из этого также следует, что из всех круговых сегментов, имеющих дуги равной длины (или одинаковые площади), половина круга имеет наибольшую площадь (или наименьший периметр).

8. Теорема

- 1) Многоугольник, составленный из данных сторон, имеет наибольшую площадь, если его можно вписать в круг.

Доказательство

Сначала заметим, что из данных сторон $a, b, c, \dots, l$, наибольшая из которых a меньше суммы остальных сторон, всегда можно составить выпуклый многоугольник, который можно вписать в круг, и к тому же только один.

Действительно, опишем круг O и проведём, начиная с точки A , последовательно хорды $AB=a, BC=b, \dots, LM=l$ так, чтобы конец M последней не совпадал с точкой A . Пусть прямая OZ перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину. Предположим, что центр O движется вдоль OZ , приближаясь к середине AB или отдаляясь от неё, в зависимости от того, расположена точка O внутри сегмента $BC\dots MA$ или вне его. Тогда дуга $BC\dots MA$ круга с центром O , которая проходит через точки A и B , уменьшается, и, поскольку её пределом является отрезок AB , имеющий длину a , то есть длину, меньшую чем $b+c+\dots+l$, то очевидно, что конец M ломаной $BC\dots M$ приближается к точке A и совпадает с ней, чтобы затем за неё перейти. Следовательно, существует только одно положение центра O , при котором ломаная $ABC\dots M$ образует вписываемый многоугольник.

Установив этот факт, обозначим через P вписанный многоугольник, стороны которого равны $a, b, c, \dots, l$, а через S — круг, описанный около этого многоугольника.

Пусть P' — какой-либо многоугольник, составленный из тех же сторон, что и P . Если к каждой стороне многоугольника P' приложить круговые сегменты, опирающиеся на соответствующие стороны многоугольника P , то

получим новую фигуру S' , ограниченную круговыми дугами, и периметр которой равен длине окружности круга S . По главной теореме $S > S'$, откуда следует, что если отнять от обеих фигур равные сегменты, получим $P > P'$.

- 2) Из всех изопериметрических многоугольников с одинаковым количеством сторон наибольшую площадь имеет правильный многоугольник.

И наоборот:

Из всех равновеликих многоугольников с одинаковым числом сторон наименьший периметр имеет правильный многоугольник.

Доказательство

Прежде всего заметим, что стороны наибольшего из изопериметрических многоугольников с одинаковым числом сторон должны быть равны.

Действительно, если две соседние стороны AB и BC не равны, то заменив треугольник ABC равнобедренным треугольником $AB'C$ с таким же основанием и периметром, получим изопериметричную фигуру, имеющую наибольшую площадь.

Значит, n сторон наибольшего многоугольника равны, а каждая из них равна n -й части периметра. По предыдущей теореме этот многоугольник должен быть вписанным. А равносторонний вписанный многоугольник является правильным.

9. Следствие. Площади правильных изопериметрических многоугольников образуют возрастающую последовательность, которая начинается треугольником и заканчивается кругом, а периметры равновеликих правильных многоугольников образуют убывающую последовательность, которая начинается треугольником и заканчивается кругом.

Действительно, пусть пятиугольник $ABCDE$ и четырёхугольник $abcd$ — правильные изопериметрические многоугольники. Четырёхугольник $abcd$ можно рассматривать как пятиугольник, одна из сторон которого равна нулю, или, взяв на какой-либо его стороне, например, ad , произвольную точку e , его можно рассматривать как пятиугольник $abcde$, угол e которого равен двум прямым. Следовательно, правильный четырёхугольник $abcd$ можно рассматривать как неправильный пятиугольник $abcde$, а потому его площадь меньше площади правильного пятиугольника $ABCDE$.