ПОЧЕМУ АЛГОРИТМУ ВСЕГДА НУЖНА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ?

А. М. Сиденко

...Есть ли что милей на свете,
Чем уноситься в дух иных столетий
И умозаключать из их работ,
Как далеко шагнули мы вперед?

И. В. Гете (1749–1832)

Название «алгоритм» произошло от латинской формы имени известного среднеазиатского математика Мухаммеда ибн Муса аль-Хорезми (Alhorithmi), жившего в 783–850 гг. В своей книге «Об индийском счете» он представил правила записи натуральных чисел с помощью арабских цифр и правила действий с ними «столбиком», знакомые теперь каждому школьнику. В XII в. эта книга была переведена на латынь и получила широкое признание в Европе.

Человек ежедневно встречается с необходимостью следовать тем или иным правилам, выполнять различные инструкции и указания. Для решения типовых задач в математике мы используем определенные правила и последовательность действий, которые их описывают. Например, правила сложения дробных чисел, нахождения корней квадратных уравнений и т. п. Конечно, любые инструкции и правила представляют собой последовательность действий, которые необходимо выполнить в определенном порядке. Чтобы решить задачу, надо знать, что дано, что следует получить, какие действия и в каком порядке выполнять. Последовательность, определяющая порядок выполнения действий с данными с целью получения искомых результатов, и является алгоритмом.

Алгоритм — это заранее заданное понятное и точное распоряжение по выполнению определенной последовательности действий для получения решения задачи за определенное количество шагов.

Понятие алгоритма является не только одним из главных понятий в математике, но также одним из главных понятий современной науки. Более того, с наступлением эры информатики алгоритмы становятся одним из важнейших факторов цивилизации.

Решение задач с помощью компьютера включает основные этапы, часть из которых осуществляется без применения компьютера.

1. Постановка задачи:
   - сбор информации о задаче;
   - формулировка условия задачи;
   - определение конечной цели решения задачи;
   - определение формы выдачи результатов;
   - описание данных (их тип, диапазон величин, структуры и т.д.).
2. Анализ и исследование задачи, модели:
   - анализ существующих аналогов;
   - анализ технических и программных средств;
   - разработка математической модели;
   - разработка структур данных.
3. Разработка алгоритма:
   - выбор метода проектирования алгоритма;
   - выбор формы записи алгоритма (блок-схемы, псевдокод и т.д.);
   - выбор тестов и метода тестирования;
   - проектирование алгоритма.
4. Программирование:
   - выбор языка программирования;
   - уточнение способов организации данных;
   - запись алгоритма на выбранном языке программирования.
5. Тестирование и редактирование:
   - синтаксическое редактирование;
   - редактирование семантики и логической структуры;
   - тестовые расчеты и анализ результатов тестирования;
   - усовершенствование программы.
6. Анализ результатов решений задачи и уточнения, в случае необходимости, математической модели.

7. Сопровождение программы:
   - доработка программы для решения конкретных задач;
   - составление документации к решенной задаче, математической модели, алгоритму, программе, набору тестов, использование.

Что представляет собой математическая модель

Математическая модель — это система математических соотношений: формул, уравнений, неравенств и т.п., отражающих существенные свойства объекта или явления.

Наиболее эффективно математическую модель можно реализовать на компьютере в виде алгоритмической модели — так называемого «вычислительного эксперимента».

Конечно, результаты вычислительного эксперимента могут не соответствовать действительности, если в модели не будут учтены какие-то важные стороны действительности.

Итак, создавая математическую модель для решения задачи, нужно:

1) выделить предположения, на которых основывается математическая модель;
2) определить, что считать исходными данными, а что — результатами;
3) записать математические соотношения, связывая результаты с исходными данными.

При построении математических моделей не всегда удается найти формулы, явно выражающие искомые величины через исходные данные. В таких случаях используются математические методы, позволяющие получить результаты определенной степени точности.

Существует не только математическое моделирование какого-либо явления, но и визуально-натурное моделирование, которое обеспечивается за счет отражения этих явлений средствами машинной графики, то есть, перед исследователем демонстрируется своеобразный «компьютерный мультфильм», который снимается в реальном времени. Наглядность здесь очень высока.

Математическая модель вообще — это математическое описание какого-либо процесса. Таким образом, правильность действия модели и правильность полученных с ее помощью выводов обеспечивается настолько точно, насколько правильно создана модель.

С другой стороны, правильность действия модели определяется тем, насколько точно уравнения и неравенства описывают суть процесса и насколько правильный математический метод создания такой модели.

Для использования ЭВМ в решении прикладных задач, они, прежде всего, должны быть «переведены» на формальный математический язык, т. е. для реального объекта, процесса или системы; должна быть построена математическая модель.

Математические модели в количественной форме с помощью логико-математических конструкций описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

Чтобы построить математическую модель, необходимо:

- тщательно проанализировать реальный объект или процесс;
- выделить его наиболее существенные черты и свойства;
- определить переменные, т. е. параметры, значения которых влияют на основные черты и свойства объекта;
- описать зависимость основных свойств объекта, процесса или системы от значения переменных с помощью логико-математических соотношений (уравнений, неравенств, логико-математических конструкций);
- выделить внутренние связи объекта, процесса или системы с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций;
- определить внешние связи и описать их с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций.

Математическое моделирование, кроме исследования объекта, процесса или системы и составления их математического описания, также включает:

- построение алгоритма, моделирующего поведение объекта, процесса или системы;
- проверку адекватности модели и объекта, процесса или системы на основе вычислительного и натурного эксперимента;
- корректировку модели;
- использование модели.

Математическое описание исследуемых процессов и систем зависит:

- от природы реального процесса или системы и составляется на основе законов физики, химии, механики, термодинамики, гидродинамики, электротехники, теории пластичности, теории упругости и т. п.;
- необходимой достоверности и точности изучения и исследования реальных процессов и систем.

Во время математического моделирования сознательно отвлекаются от конкретной физической при-

роды объектов, процессов или систем и в основном базируются на изучении количественной зависимости между величинами, описывающими эти процессы.

Математическая модель никогда полностью не тождественна объекту, процессу или системе. Основанная на упрощении, идеализации, она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, носят приближенный характер. Их точность определяется степенью адекватности (соответствия) модели и объекту.

Построение математической модели обычно начинается с построения и анализа простейшей приближенной математической модели объекта, процесса или системы. В дальнейшем, в случае необходимости, модель уточняется, корректируется ее соответствие объекту.

Рассмотрим простой пример. Нужно определить площадь поверхности письменного стола. Обычно для этого измеряют его длину и ширину, а затем умножают полученные числа. Такая элементарная процедура фактически означает следующее: реальный объект (поверхность стола) заменяется абстрактной математической моделью — прямоугольником. Прямоугольнику приписываются размеры, полученные в результате измерения длины и ширины поверхности стола, а площадь такого прямоугольника примерно принимается за искомую площадь стола.

Однако модель прямоугольника для письменного стола — это простейшая приближенная модель. При более серьезном подходе к задаче, прежде чем воспользоваться для определения площади стола моделью прямоугольника, эту модель нужно проверить. Проверку можно осуществить следующим образом: измерить длины противоположных сторон стола, а также длины его диагоналей, и сравнить их между собой. Если, с необходимой степенью точности, длины противоположных сторон и длины диагоналей попарно равны между собой, то поверхность стола действительно можно рассматривать как прямоугольник. В противном случае модель прямоугольника придется отбросить и заменить моделью четырехугольника общего вида. При более высоких требованиях к точности может возникнуть необходимость обратиться к уточнению модели еще раз, чтобы, например, учесть закругления углов стола.

С помощью этого простого примера показано, что математическая модель не определяется однозначно исследуемым объектом, процессом или системой. Для одного и того же стола мы можем применить или модель прямоугольника, или более сложную модель четырехугольника общего вида, или четырехугольника с закругленными углами. Выбор той или иной модели определяется требованием точности. С повышением точности модель приходится усложнять, учитывая новые и новые особенности изучаемого объекта, процесса или системы.

Таким образом, важно еще раз подчеркнуть: чем выше требования к точности результатов решения задачи, тем больше необходимость учитывать при построении математической модели особенности изучаемого объекта, процесса или системы. Однако здесь важно вовремя остановиться, поскольку сложная математическая модель может превратиться в сложную задачу. Проще всего строится модель, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта, процесса или системы, и есть немалый практический опыт их применения. Более сложная ситуация возникает тогда, когда наши знания об изучаемом объекте, процессе или системе недостаточны. В этом случае при построении математической модели приходится делать дополнительные предположения, которые носят характер гипотез, а такая модель называется гипотетической. Выводы, полученные в результате исследования такой гипотетической модели, носят условный характер. Чтобы проверить выводы, необходимо сравнить результаты исследования модели на ЭВМ с результатами эксперимента. Таким образом, вопрос применения некоей математической модели к изучению объекта, процесса или системы не является математическим вопросом и не может быть решен математическими методами.

Приведем пример создания математической модели с использованием основных формул физики.

Задача

Автомобиль «Жигули» с пассажирами весит около 1400 кг, тратит 8 л топлива на 100 км своего пути. Скорость автомобиля принимает значение на промежутке 40–140 км/ч.

Вычислите:

а) вес автомобиля;
б) силу трения, действующую на колеса автомобиля;
в) сопротивление воздуха;
г) длину тормозного пути.

Постройте:

а) графическую зависимость силы сопротивления воздуха от скорости автомобиля;
б) графическую зависимость длины тормозного пути от скорости автомобиля;
в) графическую зависимость между расходом топлива на преодоление силы сопротивления воздуха и силой сопротивления воздуха.

Решение

а) Определим вес автомобиля:

$$P = M \cdot g \ \text{(Н)},$$

где M — масса автомобиля;
$g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения.

Во время движения автомобиля на него действует сила трения качения, которая приближенно определяется по формуле:

$$F_B = 0{,}019 \cdot P \ \text{(Н)}.$$

б) Определим силу сопротивления воздуха при движении автомобиля.

Если скорость дана в километрах в час, то силу сопротивления воздуха можно вычислить по формуле:

$$F_{\text{сопр.}} = \frac{C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot 12{,}96},$$

где C — коэффициент пропорциональности (для легкового автомобиля принимается значение постоянное $C = 0{,}5$);
S — площадь поперечного сечения автомобиля составляет примерно 2 м^2;
ρ — плотность воздуха ($\rho = 1{,}29$ кг/м^3).

Чтобы определить количество топлива, затрачиваемого из расчета на 100 км пробега на преодоление силы сопротивления воздуха, необходимо воспользоваться формулой

$$V = \frac{F_{\text{сопр.}}}{64} \ \text{(л)}.$$

Для определения длины тормозного пути пользуются формулой

$$S = \frac{v^2}{254 \cdot \mu} \ \text{(м)},$$

где S — длина тормозного следа;
μ — коэффициент трения (*таблица 1*).

Запись формул и расчетов главной таблицы стоит выполнить вместе с учениками с целью предупреждения возможных ошибок, которые могут существенно повлиять на выполнение следующих трех заданий. Эти задания, по моему мнению, ученикам следует выполнить самостоятельно, а после построения графических зависимостей необходимо сделать выводы, в результате которых физика и информатика не будут считаться учениками предметами, далекими от реального мира. Эти расчеты предостерегут учеников от перехода дороги, если навстречу им двигается автомобиль с минимальной скоростью $v = 40$ км/ч, поскольку тормозной путь должен составлять примерно 9 м. Экономный владелец автомобиля должен знать, что при сильном ветре возрастает сила сопротивления воздуха, вследствие чего увеличиваются затраты горючего, а при максимальной скорости расходуется большее количество топлива. В задаче речь шла о стандартной марке автомобиля «Жигули», но сегодня существуют автомобили с гораздо большей массой, превышающей предыдущую в 2–3 раза, поэтому результаты расчетов должны быть наиболее убедительными для учащихся (*таблицы 2—4, рис. 1, 2*).

Таблица 1

Главная таблица расчетов

Скорость авто, v (км/час)	Сила сопротивления воздуха, F (Н)	Расход горючего на преодоление силы сопротивления воздуха, V (л)	Коэффициент трения, μ	Длина тормозного пути, S (м)
40	79,62962963	1,244212963	0,7	8,99887514
60	179,1666667	2,799479167	0,64	22,1456693
80	318,5185185	4,976851852	0,6	41,9947507
100	497,6851852	7,776331019	0,56	70,303712
120	716,6666667	11,19791667	0,53	106,967761
140	975,462963	15,2416088	0,5	154,330709

Таблица 2

Необходимые (базовые) расчеты для построения графика функции $S(v)$

Скорость авто, v (км/час)	Длина тормозного пути, S (м)
40	8,99887514
60	22,1456693
80	41,9947507
100	70,303712
120	106,967761
140	154,330709

Таблица 3

Необходимые (базовые) расчеты для построения графика $F(v)$

Скорость авто, v (км/час)	Сила сопротивления воздуха, F (Н)
40	79,62962963
60	179,1666667
80	318,5185185
100	497,6851852
120	716,6666667
140	975,462963

Таблица 4

Необходимые (базовые) расчеты для построения графика *V*(F)

Скорость авто, *v* (км/час)	Сила сопротивления воздуха, *F* (Н)	Расход горючего на преодоление силы сопротивления воздуха, *V* (л)
40	79,62962963	1,244212963
60	179,1666667	2,799479167
80	318,5185185	4,976851852
100	497,6851852	7,776331019
120	716,6666667	11,19791667
140	975,462963	15,2416088

Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова. С целью сравнения предварительных расчетов используем компьютерную программу, которой пользуется ГАИ при анализе аварийных ситуаций. Приведем атрибуты этой программы (*рис. 3*).

Проведем проверку и заполним таблицу числовых данных для их сравнения (*рис. 4, 5*)

Справка! Если автомобиль без полной загрузки движется со скоростью 80 км/ч и в экстренной ситуации требует немедленной остановки, то необходимый запас расстояния составляет 65 м (*рис. 6*).

Для облегчения наших расчетов создадим математическую модель задачи, опираясь на основные законы физики и пренебрегая трением, которое возникает при торможении автомобиля, а затем сравним с теми данными, которые можно получить с помощью программы ГАИ (*таблица 5*). Соответственно, изменим исходные данные задачи, приближая их к используемым в программе расчетам, а именно:

$$a_{\text{торможения}} = 6{,}3 \text{ м/с}^2;$$

$$v_{\text{авто}} = 84{,}35 \text{ м/с}.$$

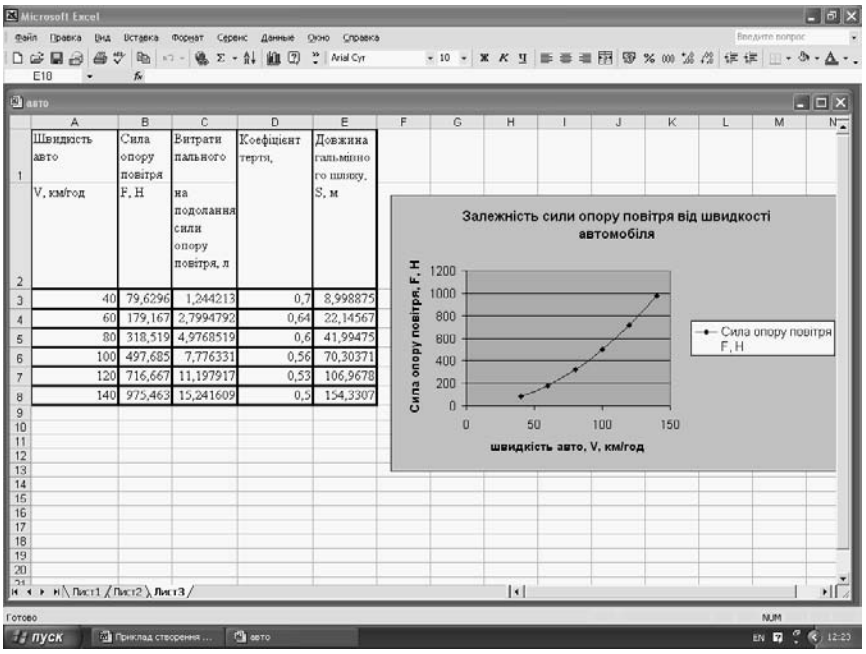

Рис. 1. Зависимость длины тормозного пути от скорости автомобиля (пример проведения расчетов в программе MC Excel с построением графика)

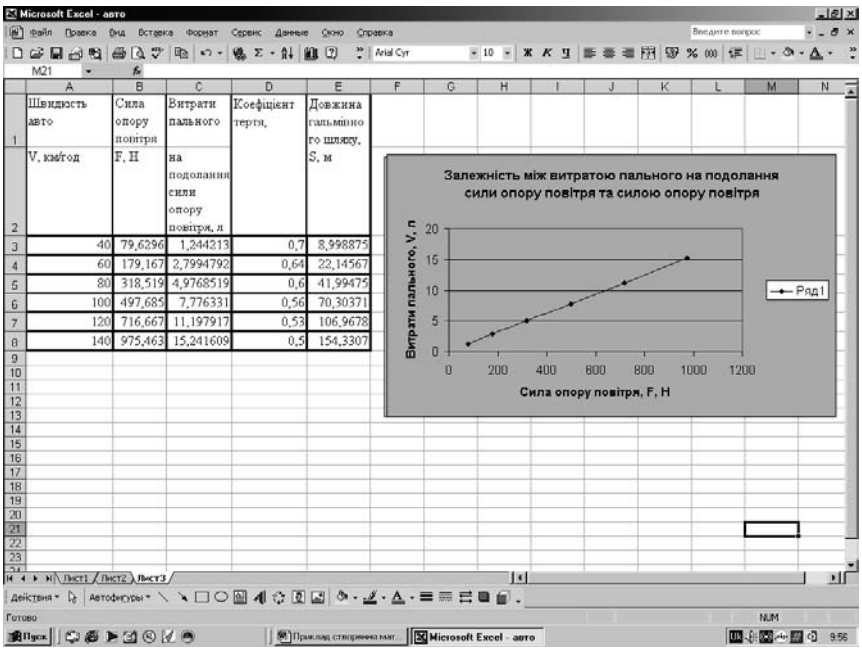

Рис. 2

Какой путь пройдет автомобиль в момент торможения до полной остановки?

Решение

Определим время t – промежуток времени, за который автомобиль полностью остановится: $v = v_0 + at$.

В момент остановки автомобиля $v = 0$, поэтому $0 = v_0 + at$, следовательно, $t = -\frac{v_0}{a}$.

Рис. 3

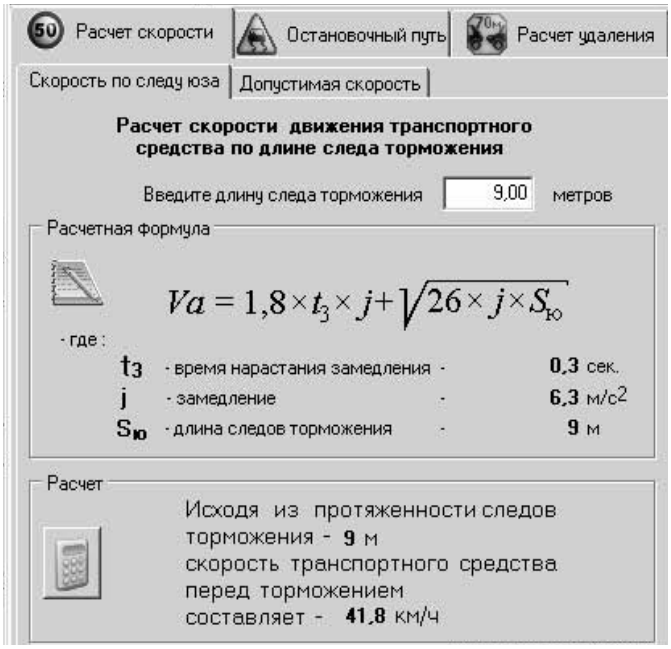

Рис. 4

Подставим это выражение для времени в формулу для определения координат автомобиля:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} = x_0 - \frac{\upsilon_0^2}{a} + \frac{a}{2}\cdot\frac{\upsilon_0^2}{a^2} = x_0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\upsilon_0^2}{a}\ .$$

Выполним подстановку числовых значений:

$\upsilon_0 = 84,35$ км/час = 23,431 м/с, $a_{\text{торможения}} = 6,3$ м/с^2;

$$x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{23,431^2}{-6,3} = 43,573 \text{ (м).}$$

Сравним тормозной путь, полученный для задачи, с компьютерными вычислениями:

$$\Delta x = 43,573 - 40 = 3,573 \text{ м.}$$

Это неплохое отклонение, если учитывать, что силу трения во время торможения и тип дорожного покрытия мы вообще не учитывали.

Изучение математических моделей физики математическими методами не только позволяет получить количественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реальных процессов, но и глубоко проникнуть в самую суть физических явлений, выявить скрытые закономерности, прогнозы новых эффектов.

Стремление к более детальному изучению физических явлений приводит ко все большему усложнению моделей, описывающих эти явления и, в свою очередь, делающих невозможным применение аналитических методов исследования.

Применение численных методов в ряде случаев позволяет заменить сложный, трудоемкий и дорогостоящий физический эксперимент значительно более экономичным математическим (численным) экспериментом. Достаточно полно проведенный математический эксперимент является основой для выбора оптимальных условий реального физического эксперимента, выбора параметров сложных физических установок, определения условий проявления новых физических эффектов и т. д. Таким образом, численные методы чрезвычайно расширяют сферу эффективного использования математических моделей физических явлений.

Математическая модель физического явления, как и любая другая модель, не может передать всех признаков явления. Установить адекватность принятой модели исследуемому явлению можно только при помощи критерия практики, сопоставляя результаты теоретических исследований принятой модели с данными экспериментов.

Построение математической модели в прикладных задачах – один из самых сложных и ответственных этапов работы. Опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель – значит решить проблему более чем наполовину. Трудность этого этапа состоит в том, что он требует сочетания математических и специальных знаний. Поэтому очень важно, чтобы математики, решая прикладные задачи, обладали специальными знаниями об объекте, а их партнеры, специалисты,– определенной математической культурой, опытом исследования в своей области, знанием ЭВМ и программирования.

30.08.2008

Протокол

Расчет наезда транспортным средством на пешехода

Общие определения:

Тип транспортного средства : **Легковой а/м без усилителя тормозов**
Тип дорожного покрытия : **Сухой асфальтобетон**
Степень загрузки трансп. ср-ва: **Без загрузки**

Расчет скорости движения транспортного средства по длине следа торможения :

$$Va = 1{,}8 \times t_3 \times j + \sqrt{26 \times j \times S_{ю}}$$

t3	- время нарастания замедления	0,3 сек
j	- замедление	6,3 м/с2
Sю	- длина следов торможения	9 м

Исходя из длины следов торможения **9 м** скорость ТС перед торможением составляет **41,8 м**

Рис. 5

Таблица 5

№ п/п	Значения скорости автомобиля, км/час	Расчеты тормозного пути в первом случае по математической модели, *d* (м)	Значения скорости автомобиля, км/час	Расчеты тормозного пути по программе ГАИ, *S* (м)
1	40	8,99887514	40,2	8,5
2	60	22,1456693	60,64	21,5
3	80	41,9947507	80,19	39
4	100	70,303712	102	63

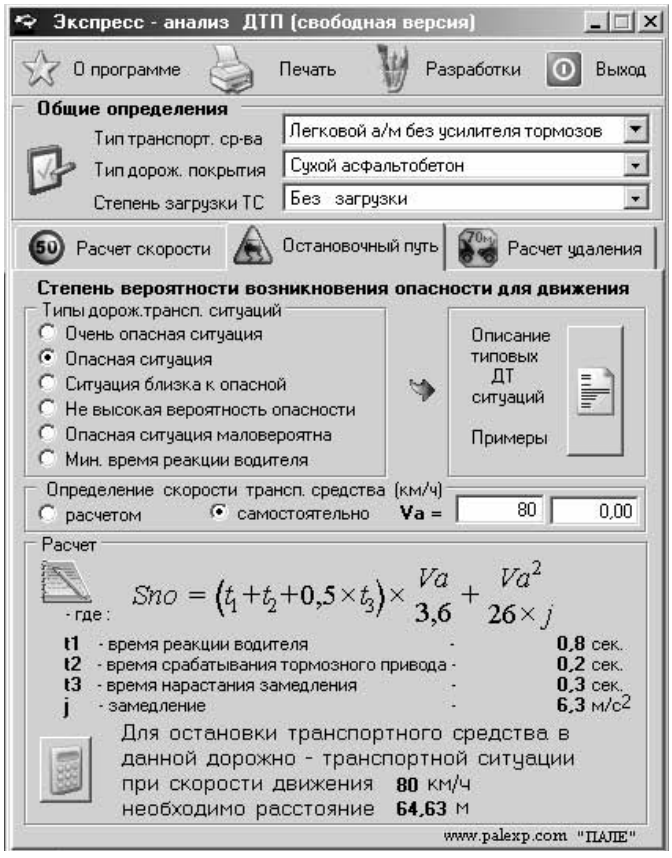

Рис. 6

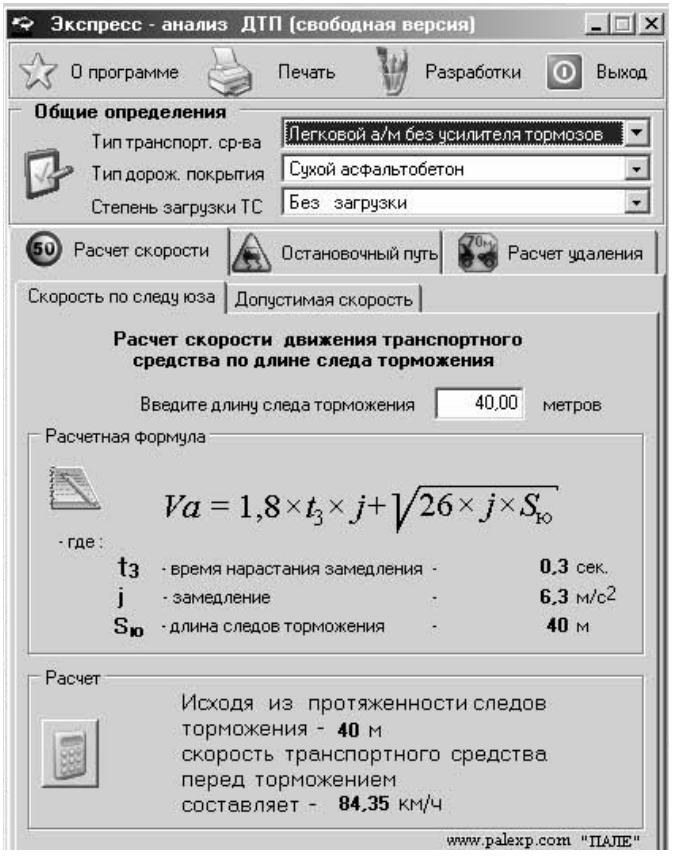

Рис. 7