ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ И ПЛОЩАДЕЙ. ОКРУЖНОСТЬ

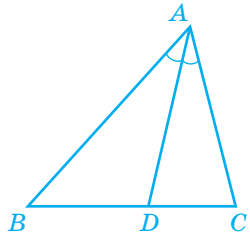
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К ЕГЭ

Е. В. Ланских, г. Краснодар

Предлагаю подборку задач по планиметрии, которую можно использовать на уроках итогового повторения и подготовки учащихся 11-х классов к ЕГЭ.

Пропорциональность отрезков

Теоретические сведения

Отношением отрезков AB и CD называют отношение их длин $\frac{AB}{CD}$	
Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$	
Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам	 $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}$

Задача 1. На прямой расположены точки M, N, P так, что $MN:NP=3:2$, причём $MP=6$ см. Найдите MN и NP.

Решение

Случай 1. Если точка N лежит между точками M и P, то $MN+NP=MP$.

Пусть $MN=3k$, $NP=2k$.

Тогда $3k+2k=6$, $k=\frac{6}{5}$;

$$MN=3\cdot\frac{6}{5}=3{,}6 \text{ (см)},\ NP=2\cdot\frac{6}{5}=2{,}4 \text{ (см)}.$$

Случай 2. Если точка P лежит между точками M и N, то $MN-NP=MP$.

Имеем: $3k-k=6$, $k=6$.

Значит,

$$MN=3\cdot6=18 \text{ (см)},\ NP=2\cdot6=12 \text{ (см)}.$$

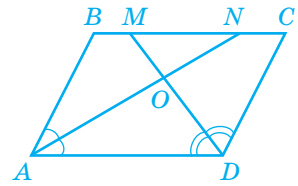
Случай 3. Если точка M лежит между точками N и P, то $MN<NP$, что противоречит условию. Следовательно, при таком взаимном расположении точек на прямой задача решений не имеет.

Ответ. 3,6 см, 2,4 см или 18 см, 12 см.

Задача 2 (С4, ЕГЭ 2010, Дальневосточный регион). В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN=1:5$. Найдите BC, если $AB=3$.

Решение. Пусть точка O — точка пересечения биссектрис углов A и D параллелограмма. Так как точки M и N лежат на стороне BC и $BM<MN$, то точка M лежит между точками B и N.

Случай 1. Точка O лежит внутри параллелограмма $ABCD$.



Треугольники ABN и DCM — равнобедренные (по свойству биссектрисы угла параллелограмма). У них $AB=BN$, $DC=CM$.

Поскольку $AB=DC$ (как противоположные стороны параллелограмма), то

$$AB=BN=DC=CM=3.$$

Значит, $BM=CN$.

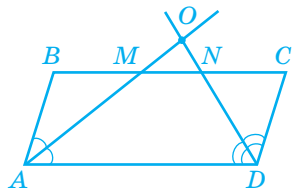
По условию $BM:MN=1:5$, тогда

$BM=CN=k$, $MN=5k$, $BN=6k$, $BC=7k$.

Имеем: $6k=3$, $k=0{,}5$.

Значит, $BC=7\cdot 0{,}5=3{,}5$.

Случай 2. Точка O лежит вне параллелограмма $ABCD$.



Треугольники ABM и DCN — равнобедренные: $AB=BM$ и $DC=CN$.

Поскольку $AB=DC$, то

$$AB=BM=DC=CN=3.$$

Значит, $BM=CN$.

Имеем (как и в случае 1):

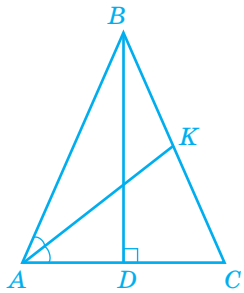
$$BM=CN=k,\ \ MN=5k,\ \ BN=6k,\ \ BC=7k.$$

Но у нас $BM=3$. Значит, $BC=7\cdot 3=21$.

Ответ. 3,5 или 21.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к боковой стороне, делит её в отношении $5:8$, считая от вершины. Найдите длину основания данного треугольника, если радиус его вписанной окружности равен 2.

Решение. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AC.



По условию $\dfrac{BK}{KC}=\dfrac{5}{8}$.

$$BK=5k,\ \ KC=8k,$$

$$BC=AB=BK+KC=5k+8k=13k.$$

AK — биссектриса угла A, поэтому

$$\frac{BK}{KC}=\frac{AB}{AC}.$$

Значит,

$$AC=\frac{AB\cdot KC}{BK}=\frac{13k\cdot 8k}{5k}=\frac{13\cdot 8}{5}k.$$

Проведём к стороне AC высоту BD.

$$AD=\frac{1}{2}AC=\frac{13\cdot 4}{5}k.$$

Из прямоугольного треугольника ABD:

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{(13k)^2-\left(\frac{13\cdot 4}{5}k\right)^2}=\frac{13\cdot 3}{5}k.$$

Площадь треугольника ABC:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD,\ \ S=\frac{1}{2}\cdot\frac{13\cdot 8}{5}k\cdot\frac{13\cdot 3}{5}k=\frac{13^2\cdot 12}{5^2}k^2.$$

Полупериметр треугольника ABC:

$$p=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{2\cdot 13k+\frac{13\cdot 8}{5}k}{2}=\frac{13\cdot 9}{5}k.$$

Поскольку площадь треугольника $S=p\cdot r$, где r — радиус вписанной окружности, то

$$\frac{13^2\cdot 12}{5^2}k^2=\frac{13\cdot 9}{5}k\cdot 2.$$

После преобразований получим:

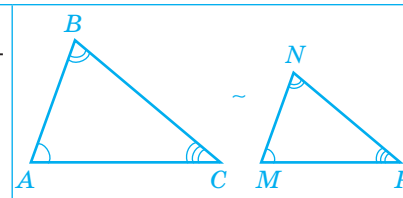
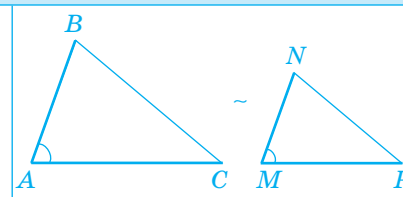
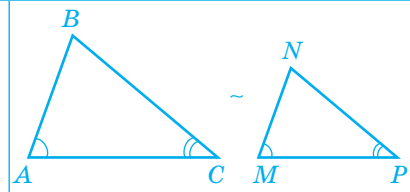
$$26k^2-15k=0,\ \ k=\frac{15}{26}.$$

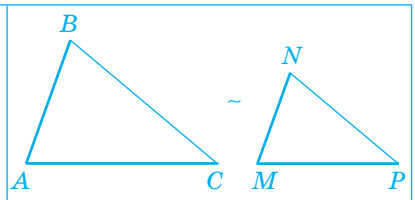
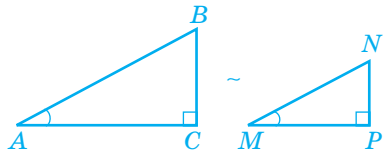
Значит, $AC=\dfrac{13\cdot 8}{5}\cdot\dfrac{15}{26}=12$.

Ответ. 12.

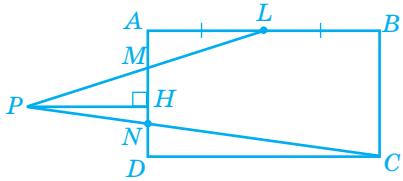
Подобие треугольников

Теоретические сведения

Треугольники называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого	 $\angle A=\angle M,\ \angle B=\angle N,\ \angle C=\angle P,$ $\dfrac{AB}{MN}=\dfrac{BC}{NP}=\dfrac{AC}{MP}$
Признаки подобия треугольников	
По двум сторонам и углу между ними	 $\dfrac{AB}{MN}=\dfrac{AC}{MP},\ \angle A=\angle M$
По двум углам	 $\angle A=\angle M,\ \angle C=\angle P$

По трём сторонам	 $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{AC}{MP}$
Подобие прямоугольных треугольников	
По острому углу	 $\angle A=\angle M$

Задача 1. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB=20$, $BC=7$ на стороне AD взяты такие точки M и N, что $AM=3$, $DN=2$. Точка L является серединой стороны AB. Найдите площадь треугольника MNP, где P — точка пересечения прямых CN и LM.



Решение. Поскольку по условию точка L — середина стороны AB, то

$$LA=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot 20=10.\quad AD=AM+MN+ND,$$

значит, $MN=AD-AM-ND=7-3-2=2$.

В треугольнике MNP проведём высоту PH. Пусть $HM=x$, тогда $HN=2-x$.

Прямоугольные треугольники LAM и PHM подобны, так как имеют по равному острому углу ($\angle LMA=\angle PMH$ как вертикальные). Значит,

$$\frac{LA}{PH}=\frac{AM}{HM},\quad \frac{10}{PH}=\frac{3}{x},\quad PH=\frac{10x}{3}.$$

Прямоугольные треугольники CDN и PHN подобны ($\angle CND=\angle PNH$ как вертикальные).

Значит,

$$\frac{CD}{PH}=\frac{DN}{HN},\quad \frac{20}{PH}=\frac{2}{2-x},$$

$$PH=\frac{20(2-x)}{2}=10(2-x).$$

Тогда $\frac{10x}{3}=10(2-x)$, $x=1{,}5$.

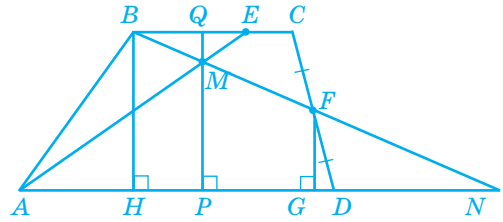
$$PH=\frac{10x}{3}=\frac{10\cdot 1{,}5}{3}=5.$$

Площадь треугольника MNP:

$$S=\frac{1}{2}MN\cdot PH=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5=5.$$

Ответ. 5.

Задача 2. Высота трапеции $ABCD$ равна 5, а основания BC и AD соответственно равны 3 и 5. Точка E находится на стороне BC, причём $BE=2$, F — середина стороны CD, а M — точка пересечения отрезков AE и BF. Найдите площадь четырёхугольника $AMFD$.



Решение. Продолжим отрезок BF и сторону основания трапеции AD до пересечения в точке N. Так как по условию точка F — середина стороны CD, то $CF=DF$. Проведём через вершину B и точку M высоты трапеции: $BH=QP=5$.

Треугольники BCF и NDF равны по стороне и прилежащим к ней углам ($CF=DF$, $\angle CFB=\angle DFN$ как вертикальные, $\angle BCF=\angle NDF$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD). Значит,

$$BC=ND=3.$$

Тогда $AN=AD+ND=5+3=8$.

Треугольники AMN и EMB подобны по двум углам ($\angle AMN=\angle BME$ как вертикальные, $\angle NAE=\angle BEM$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AE). Тогда

$$\frac{AN}{BE}=\frac{8}{2}=4;\quad MP=4MQ=\frac{4}{5}QP=\frac{4}{5}\cdot 5=4.$$

В прямоугольном треугольнике HBN проведём $FG\parallel BH$. Тогда FG — средняя линия треугольника HBN;

$$FG=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\cdot 5=2{,}5.$$

$$S_{\triangle FDN}=\frac{1}{2}FG\cdot ND=\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 3=3{,}75,$$

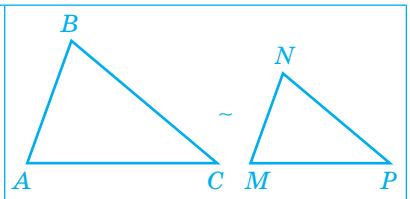
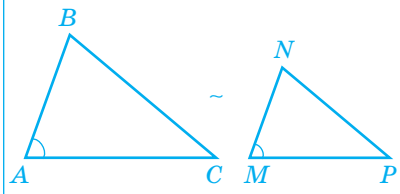
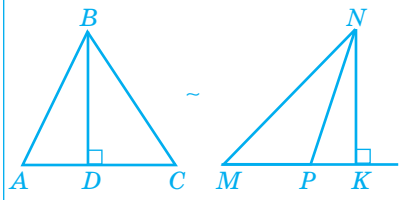
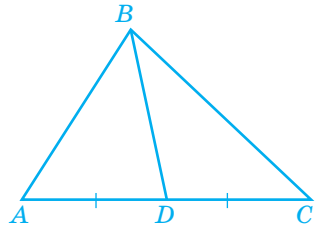
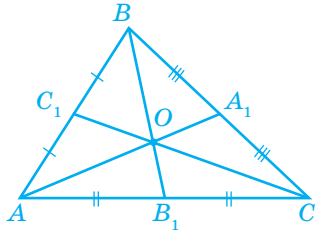
$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AN\cdot MP=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=16,$$

$$S_{AMFD}=S_{\triangle AMN}-S_{\triangle FDN}=16-3{,}75=12{,}25.$$

Ответ. 12,25.

Отношение площадей подобных треугольников

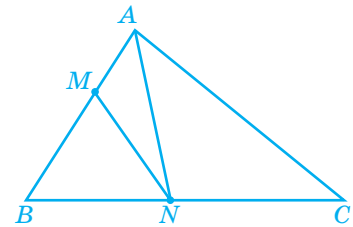
Теоретические сведения

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия	 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNK}} = k^2$
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади данных треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы	 $\angle A = \angle M,\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNK}} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MP}$
Площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся как основания, к которым проведены эти высоты	 $BD = NK,\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNK}} = \frac{AC}{MP}$
Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника	 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$
Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины	 $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{2}{1}$

Задача 1. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 3 : 4$ и $BN : NC = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника MNA равна 9.

Решение

Треугольники BMN и MNA имеют общую высоту (проведенную из вершины N к прямой AB, содержащей противоположную сторону), значит,



$$\frac{S_{\triangle MNA}}{S_{\triangle BMN}} = \frac{AM}{MB} = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$S_{\triangle BMN} = \frac{S_{\triangle MNA} \cdot MB}{AM} = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12.$$

$$S_{\triangle ABN} = S_{\triangle MNA} + S_{\triangle BMN} = 9 + 12 = 21.$$

Треугольники ABN и ABC имеют общую высоту (проведенную из вершины A к прямой BC). Значит,

$$\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{8}.$$

Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle ABN} \cdot BC}{BN} = \frac{21 \cdot 8}{3} = 56.$$

Ответ. 56.

Задача 2. В трапеции $ABCD$ AC и BD — диагонали, O — точка их пересечения.

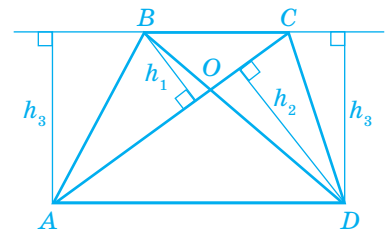
$$AO : OC = n : m.$$

Найдите:

$$\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle AOB}},\ \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOD}},\ \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}},\ \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}},\ \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}}.$$

Решение

Треугольники ABC и DBC имеют равные высоты h_3 и общее основание BC. Значит, площади этих треугольников равны. Так как



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} \text{ и } S_{\triangle BCD} = S_{\triangle COD} + S_{\triangle BOC},$$

то $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$.

Треугольники COB и AOB имеют общую высоту h_1. Значит,

$$\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{OC}{AO}=\frac{m}{n}.$$

Треугольники COD и AOD имеют общую высоту h_2. Значит,

$$\frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{OC}{AO}=\frac{m}{n}.$$

Аналогично: $\triangle COB$ и $\triangle COD$ (равный треугольнику AOB) имеют общую высоту h_1, а $\triangle AOB$ и $\triangle AOD$ — h_2.

Итак: $\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{m}{n}.$

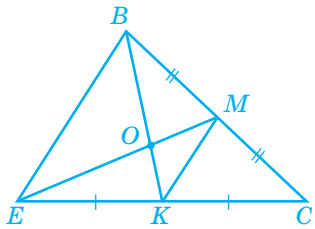
Треугольники AOD и COB подобны (по двум углам), значит,

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}}=\frac{AO^2}{OC^2}=\frac{n^2}{m^2}.$$

Ответ. $\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{m}{n}$, $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}}=\frac{n^2}{m^2}$.

Задача 3. Медианы BK и EM треугольника BCE пересекаются в точке O. Докажите, что

$$S_{\triangle MOK}:S_{\triangle CMK}=1:3.$$



Доказательство. Точка O — точка пересечения медиан треугольника BCE, значит,

$$BO:OK=2:1.$$

Тогда

$$BK:OK=3:1,$$

а так как треугольники BMK и MOK имеют общую высоту (проведенную из вершины M к прямой BK, содержащей стороны BK и OK соответственно), то

$$S_{\triangle MOK}:S_{\triangle BMK}=1:3.$$

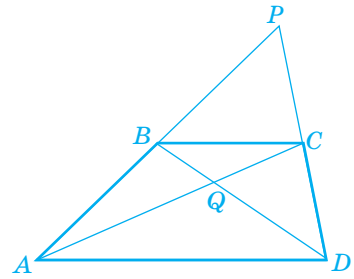
Поскольку EM — медиана, то $BM=CM$. Значит, KM — медиана треугольника BKC. Тогда

$$S_{\triangle BMK}=S_{\triangle CMK}.$$

Следовательно, $S_{\triangle MOK}:S_{\triangle CMK}=1:3$, что и требовалось доказать.

Задача 4. В трапеции $ABCD$ продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке P, Q — точка пересечения диагоналей этой трапеции. Найдите отношение длины меньшего из оснований трапеции к длине большего из оснований, если площадь треугольника ABQ составляет $\frac{1}{4}$ от площади треугольника ACP.

Решение. Треугольники BQC и DQA подобны по двум углам ($\angle DAQ=\angle BCQ$ и $\angle QDA=\angle QBC$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущих AC и BD соответственно).



Пусть

$$\frac{BC}{AD}=\frac{CQ}{AQ}=\frac{BQ}{QD}=\frac{x}{y}.$$

Так как у треугольников ABQ и APC угол PAC общий, то

$$\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle APC}}=\frac{AB\cdot AQ}{AP\cdot AC}.$$

$\frac{AQ}{CQ}=\frac{y}{x}$, значит, $\frac{AQ}{AC}=\frac{y}{x+y}$.

Треугольники APD и BPC подобны по двум углам ($\angle P$ — общий, $\angle PBC=\angle PAD$ как соответственные при параллельных прямых BC и AD и секущей AP), значит,

$$\frac{BC}{AD}=\frac{BP}{AP}=\frac{x}{y},\ \frac{AB}{AP}=\frac{y-x}{y}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle APC}}=\frac{AB\cdot AQ}{AP\cdot AC}=\frac{(y-x)y}{y(x+y)}=\frac{y-x}{y+x}=\frac{1}{4}.$$

Имеем:

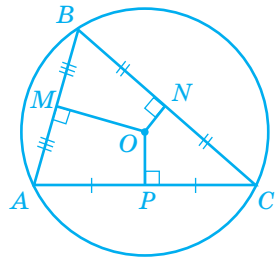
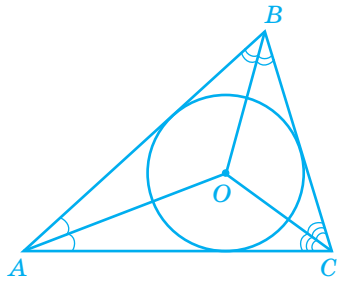
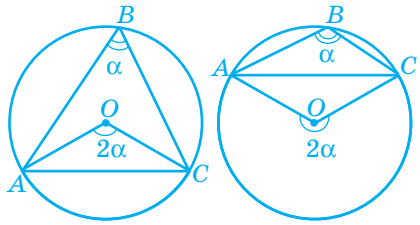
$$\begin{cases}y-x=1,\\ y+x=4,\end{cases}\ 2y=5,\ \ y=2{,}5,\ \ x=1{,}5.$$

Значит, $\frac{BC}{AD}=\frac{1{,}5}{2{,}5}=\frac{3}{5}=0{,}6.$

Ответ. 0,6.

Окружность

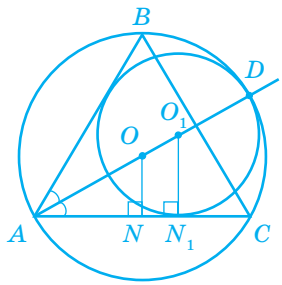
Теоретические сведения

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам	
Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис	
Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла	

Задача 1. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

Решение. Пусть точка D — точка касания окружностей; точка O — центр равностороннего треугольника ABC, $AO = DO = R$ — радиусы описанной окружности, $ON \perp AC$. Точка O_1 — центр окружности, вписанной в угол A, $O_1N_1 = O_1D = r$ — радиусы этой окружности, $O_1N_1 \perp AC$. Точки O, O_1, D лежат на одной прямой — биссектрисе AD угла A.

Случай 1. Точка D — точка внутреннего касания окружностей.



Имеем:

$$AO_1 = AD - DO_1 = 2R - r,$$

$$\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

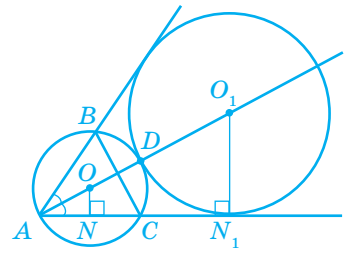
Из прямоугольного треугольника AON:

$$ON = AO\sin 30^\circ = \frac{1}{2}R.$$

Прямоугольные треугольники AON и AO_1N_1 подобны (по острому углу), следовательно,

$$\frac{AO}{ON} = \frac{AO_1}{AN_1},\quad \frac{R}{\frac{1}{2}R} = \frac{2R-r}{r},\quad \frac{R}{r} = \frac{3}{2}.$$

Случай 2. Точка D — точка внешнего касания окружностей.



Имеем:

$$AO_1 = AD + DO_1 = 2R + r.$$

$$\triangle AON \sim \triangle AO_1N_1,$$

значит,

$$\frac{AO}{ON} = \frac{AO_1}{AN_1},\quad \frac{R}{\frac{1}{2}R} = \frac{2R+r}{r},\quad \frac{R}{r} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{3}{2}$ или $\frac{1}{2}$.

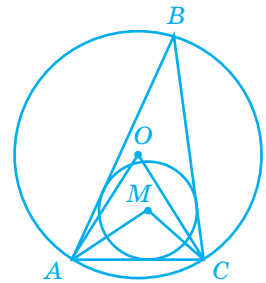
Задача 2. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC,

$$\angle AOC = 60^\circ.$$

Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение

Случай 1. Треугольник ABC — остроугольный (центр описанной окружности лежит внутри треугольника).



В равнобедренном треугольнике AOC

$$\angle AOC = 60^\circ, \quad OA = OC$$

как радиусы одной окружности. Значит, треугольник AOC — равносторонний,

$$OA = OC = AC.$$

$\angle ABC$ — вписанный в окружность, а $\angle AOC$ — соответствующий ему центральный угол. Значит,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Тогда

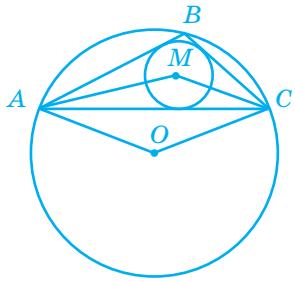
$$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Поскольку центр вписанной окружности точка M — точка пересечения биссектрис треугольника, то

$$\angle MAC + \angle MCA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \frac{1}{2}\cdot 150^\circ = 75^\circ.$$

Тогда $\angle AMC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Случай 2. Треугольник ABC — тупоугольный (центр описанной окружности лежит вне треугольника).



$\angle ABC$ — вписанный в окружность, а $\angle AOC$ — соответствующий ему центральный угол,

$$\angle AOC = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ.$$

Значит,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cdot 300^\circ = 150^\circ.$$

Тогда

$$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

$$\angle MAC + \angle MCA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \frac{1}{2}\cdot 30^\circ = 15^\circ.$$

Тогда

$$\angle AMC = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ.$$

Примечание. Задачу можно решить иначе (см. [5], № 41), воспользовавшись вначале следствием из теоремы синусов.

$$OA = OC = AC = R.$$

Тогда

$$AC = 2R\sin ABC,$$

откуда

$$\sin ABC = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\angle ABC = 30^\circ \text{ или } \angle ABC = 150^\circ.$$

Ответ. 105° или 165°.

Задания для самостоятельного решения

1. На прямой взяты точки D, E, F так, что точка E расположена правее точки D и
$$EF : DE = 1 : 3.$$
Найдите отношение $DE : DF$.
2. В прямоугольнике $MNPK$ $MN = 2$, $NP = \sqrt{3}$. На прямой MN выбрана точка F так, что $\angle MFK = \angle KFP$. Найдите MF.
3. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 3. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, площадь треугольника AOB равна 6. Найдите площадь трапеции.
4. Треугольник ABC — равнобедренный. Радиус OA описанной окружности образует с основанием AC угол OAC, равный 20°. Найдите угол BAC.
5. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую — в точке C. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

Литература

1. *Клово А. Г., Мальцев Д. А., Абзелилова Л. И.* Математика. Сборник тестов по плану ЕГЭ 2010. — М. : НИИ школьных технологий, 2010. — 191 с.
2. *Математика.* 10–11 классы. Тематические тесты. Геометрия, текстовые задачи. Подготовка к ЕГЭ 2010 / под ред. Ф. Ф. Лысенко. — Ростов-на-Дону : Легион–М, 2009.
3. *Мальцев Д. А., Мальцев А. А., Мальцева Л. И.* Математика. Всё для ЕГЭ 2011. Часть 2: учебно-методическое пособие. — М. : НИИ школьных технологий, 2010.
4. *Математика.* Подготовка к ЕГЭ 2009. Вступительные испытания / под ред. Ф. Ф. Лысенко. — Ростов-на-Дону : Легион, 2008. — 400 с. («Готовимся к ЕГЭ»)
5. *Корянов А. Г., Прокофьев А. А.* Математика ЕГЭ 2011 (типовые задания С4). Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи). — http://www.alleng.ru/d/math/math786.htm
6. *Интернет-ресурсы:* http://www.fipi.ru, http//abiturient.pro, http://alexlarin.net.

Составитель О. А. Старова

Что такое тригонометрия?

Тригонометрия (от греч. τριγωνον — треугольник и μετρεω — измеряю) — математическая дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами треугольников и тригонометрические функции.

Термин «тригонометрия» впервые был употреблён в 1595 году как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (Bartholomäus Pitiscus, 1561–1613), автора учебника по тригонометрии и тригонометрических таблиц.

Казалось бы, тригонометрию можно считать лишь частью геометрии, однако тригонометрические функции, с помощью которых связываются элементы треугольника, — это объект изучения математического анализа, а тригонометрические уравнения изучают методами алгебры. Таким образом, тригонометрия — раздел математики, использующий достижения других её важных разделов.

В тригонометрии выделяют три вида соотношений:

1) между самими тригонометрическими функциями;
2) между элементами плоского треугольника (тригонометрия на плоскости);
3) между элементами сферического треугольника, то есть фигуры, высекаемой на сфере тремя плоскостями, проходящими через её центр. Тригонометрия началась именно с наиболее сложной, сферической части.

История тригонометрии как науки

Тригонометрия, как и любая другая научная дисциплина, возникла из потребностей практической деятельности человека. Различные задачи астрономии, мореплавания, землемерия, архитектуры привели к необходимости разработать способ вычисления элементов геометрических фигур по известным значениям других их элементов, найденных путём непосредственных измерений.

Для решения конкретных астрономических вопросов античным астрономам приходилось производить сложные геометрические построения на сфере и решать вычислительные задачи, связанные с указанными построениями. Для этого потребовалось создать специальный математический аппарат, применяя который можно было получить достаточно точные результаты. Именно таким аппаратом стала тригонометрия.

Зарождение тригонометрии относится к глубокой древности. Ещё задолго до новой эры вавилонские учёные умели предсказывать солнечные и лунные затмения. Это позволяет сделать вывод о том, что уже в те времена были известны некоторые простейшие сведения из тригонометрии.

Стимулом к развитию тригонометрии являлись, прежде всего, потребности астрономии, вспомогательным разделом которой стала тригонометрия на первом этапе своего развития. Понадобился длительный срок, для того чтобы, избавившись от этой зависимости, она превратилась в самостоятельную отрасль математики.

Накопившийся материал астрономических наблюдений требовал математической обработки. Одним из основоположников тригонометрии считают древнегреческого астронома Гиппарха, жившего во II в. до н. э. Именно ему приписывают создание тригонометрии как науки, пограничной между геометрией и астрономией. Гиппарх впервые рассмотрел тригонометрический круг и вычислил таблицу хорд, соответствующих различным углам. Таблица хорд в круге стала основным элементом греческой тригонометрии на плоскости. Эти таблицы до нас не дошли, но они вошли (в усовершенствованном виде) в сочинение «Великое построение» (Альмагест) знаменитого александрийского астронома Клавдия Птолемея, жившего во второй половине II в. н. э.

Птолемей вывел соотношения между хордами в круге (выражавшиеся словесно ввиду отсутствия в то время математической символики), которые равносильны современным формулам для синуса половинного и двойного угла, суммы и разности двух углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin(a\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha.$$