ТРИГОНОМЕТРИЯ

Составитель О. А. Старова

Что такое тригонометрия?

Тригонометрия (от греч. τριγωνον — треугольник и μετρεω — измеряю) — математическая дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами треугольников и тригонометрические функции.

Термин «тригонометрия» впервые был употреблён в 1595 году как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (Bartholomäus Pitiscus, 1561–1613), автора учебника по тригонометрии и тригонометрических таблиц.

Казалось бы, тригонометрию можно считать лишь частью геометрии, однако тригонометрические функции, с помощью которых связываются элементы треугольника, — это объект изучения математического анализа, а тригонометрические уравнения изучают методами алгебры. Таким образом, тригонометрия — раздел математики, использующий достижения других её важных разделов.

В тригонометрии выделяют три вида соотношений:

1) между самими тригонометрическими функциями;
2) между элементами плоского треугольника (тригонометрия на плоскости);
3) между элементами сферического треугольника, то есть фигуры, высекаемой на сфере тремя плоскостями, проходящими через её центр. Тригонометрия началась именно с наиболее сложной, сферической части.

История тригонометрии как науки

Тригонометрия, как и любая другая научная дисциплина, возникла из потребностей практической деятельности человека. Различные задачи астрономии, мореплавания, землемерия, архитектуры привели к необходимости разработать способ вычисления элементов геометрических фигур по известным значениям других их элементов, найденных путём непосредственных измерений.

Для решения конкретных астрономических вопросов античным астрономам приходилось производить сложные геометрические построения на сфере и решать вычислительные задачи, связанные с указанными построениями. Для этого потребовалось создать специальный математический аппарат, применяя который можно было получить достаточно точные результаты. Именно таким аппаратом стала тригонометрия.

Зарождение тригонометрии относится к глубокой древности. Ещё задолго до новой эры вавилонские учёные умели предсказывать солнечные и лунные затмения. Это позволяет сделать вывод о том, что уже в те времена были известны некоторые простейшие сведения из тригонометрии.

Стимулом к развитию тригонометрии являлись, прежде всего, потребности астрономии, вспомогательным разделом которой стала тригонометрия на первом этапе своего развития. Понадобился длительный срок, для того чтобы, избавившись от этой зависимости, она превратилась в самостоятельную отрасль математики.

Накопившийся материал астрономических наблюдений требовал математической обработки. Одним из основоположников тригонометрии считают древнегреческого астронома Гиппарха, жившего во II в. до н. э. Именно ему приписывают создание тригонометрии как науки, пограничной между геометрией и астрономией. Гиппарх впервые рассмотрел тригонометрический круг и вычислил таблицу хорд, соответствующих различным углам. Таблица хорд в круге стала основным элементом греческой тригонометрии на плоскости. Эти таблицы до нас не дошли, но они вошли (в усовершенствованном виде) в сочинение «Великое построение» (Альмагест) знаменитого александрийского астронома Клавдия Птолемея, жившего во второй половине II в. н. э.

Птолемей вывел соотношения между хордами в круге (выражавшиеся словесно ввиду отсутствия в то время математической символики), которые равносильны современным формулам для синуса половинного и двойного угла, суммы и разности двух углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin(a\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha.$$

Однако в древней Греции тригонометрию не выделяли в самостоятельную науку, а считали частью астрономии.

Важный вклад в развитие тригонометрии был внесён индийской математикой в период V–XII вв. н. э. Хотя так же, как и древнегреческая, индийская тригонометрия была вспомогательным разделом астрономии.

Индийские математики вычисляли не полную хорду, как это делали греки, а её половину (то есть «линию синусов»). Линия синусов именовалась ими «архаджива», что буквально означало «половина тетивы лука». Индийцы составили таблицу синусов, в которой были даны значения полухорд, измеренных частями (минутами) окружности для всех углов от 0° до 90°. Эти таблицы были точнее таблиц Птолемея.

Ознакомившись с трудами индийских математиков, арабские учёные существенно продвинули вперёд разработку тригонометрии. Арабы называли линию синусов словом «джайб», что переводится на латынь как sinus; от латинского выражения complementi sinus (синус дополнения) произошло слово «косинус». Линии тангенсов и котангенсов арабы первоначально именовали соответственно «обращённой тенью» и «плоской тенью» — названиями, восходящими к гномонике александрийских астрономов и объясняющимися тем, что линии тангенсов и котангенсов первоначально рассматривали как тени гномона — горизонтального и вертикального — соответственно на вертикальную и горизонтальную плоскости. (Гномон — это вертикальный шест, установленный на ровной горизонтальной площадке. Если известна длина гномона L, то по длине тени l, отбрасываемой им в данный момент, можно определить угловую высоту h Солнца над горизонтом. Пользуясь современной математической терминологией, выражение для определения h можно записать следующим образом:

$$\operatorname{tg} h = \frac{L}{l}.$$

Соотношения между длиной гномона и тени, изучавшиеся гномоникой, являются, по существу, тригонометрическими. Поэтому гномоника была одним из источников тригонометрии.)

Линии синусов и косинусов измеряли, следуя традиции александрийских и индийских астрономов, в 60-х долях радиуса, а линии тангенсов и котангенсов — в 7-х и 12-х долях гномона. Линии секансов и косекансов, являющиеся отрезками прямой диаметра, сначала называли диаметрами обращённой и соответственно плоской тени, а впоследствии — первым и вторым диаметрами. Теоретический интерес этих двух последних линий невелик, но таблицы их вплоть до открытия логарифмов имели практическую ценность, поскольку позволяли заменять умножением деление на косинус и синус.

Пользовались также понятием обращённого синуса угла (синус-верзус, или версинус) или его стрелы, имея в виду отрезок, равный разности между радиусом описанной окружности и линией косинусов. Кроме этого, использовали косинус-верзус (коверсинус), гаверсинус, эксеканс и экскосеканс. Версинус, коверсинус и гаверсинус были удобны для ручных расчётов с использованием логарифмов, поскольку они всюду неотрицательны, однако в связи с развитием вычислительных средств данная область применения стала неактуальной. (В настоящее время эти функции используют для описания соответствующих сигналов в электронике, например в функциональных генераторах. Гаверсинус также используют в навигационных расчётах для устранения ошибок округления в вычислительных системах с ограниченной разрядностью.)

В XI–XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. Развитию тригонометрии способствовали потребности географии, геодезии, военного дела.

Тригонометрия получила развитие в средние века, в первую очередь на юго-востоке: в Индии (Ариабхата, Брамагупта, Бхаскара), в Узбекистане, Азербайджане и Таджикистане (Насир ад-Дин ат-Туси, ал-Каши, ал-Бируни), в Аравии (Ахмад, ибн-Абдаллах, ал-Баттани). Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому учёному Насир ад-Дину Мухаммаду ат-Туси (1201–1274), написавшему «Трактат о полном четырёхугольнике». Работы учёных этого периода привели к выделению тригонометрии в самостоятельный раздел математики. Однако в их трудах ещё не было необходимой символики, и поэтому развитие тригонометрии происходило медленно.

Начиная с XV века работы, посвящённые вопросам тригонометрии, появляются и в Европе. Немецкий учёный Иоганн Мюллер (1436–

1476), известный в науке под именем Региомонтан, издал труд «Пять книг о треугольниках всех видов», сыгравший важную роль в развитии тригонометрии. В нём дано систематическое изложение тригонометрии как самостоятельной научной дисциплины.

Дальнейшее развитие тригонометрии шло по пути накопления и систематизации формул, уточнения основных понятий, становления терминологии и обозначений. Многие европейские математики работали в области тригонометрии. Среди них такие великие учёные, как Николай Коперник (1473–1543), Тихо Браге (1546–1601) и Иоганн Кеплер (1571–1630). Франсуа Виет (1540–1603) дополнил и систематизировал различные случаи решения плоских и сферических треугольников, открыл «плоскую» теорему косинусов и формулы для тригонометрических функций от кратных углов. Исаак Ньютон (1643–1727) разложил эти функции в ряды и открыл путь для их использования в математическом анализе.

Таким образом, тригонометрия в своём развитии прошла два этапа. Начала первого этапа положены в античном мире; в связи с запросами астрономии возникает учение о взаимной связи круговых дуг и их хорд и составляются таблицы хорд. Тригонометрия имела геометрический язык и применялась к решению геометрических задач.

Второй этап, начало которого положено в трудах Франсуа Виета, полностью раскрывается в школе академика Леонарда Эйлера. Развитие алгебраической символики позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул; применение отрицательных чисел позволило рассматривать направленные углы и дуги и распространить понятие тригонометрических линий (определённых отрезков в круге) для любых углов. В этот период была создана база для изучения тригонометрических функций как функций числового аргумента, основа аналитической теории тригонометрических функций.

Вклад Л. Эйлера в развитие тригонометрии

Несмотря на то, что отдельные идеи тригонометрии относятся к глубокой древности, тригонометрия является одним из наиболее молодых разделов элементарной математики, получивших окончательное оформление лишь в XVIII веке.

Процесс накопления и обогащения тригонометрических знаний привёл к тому, что начиная примерно с XIII в. материал начали систематизировать, составляя отдельную, во многом самостоятельную, область математики — тригонометрию.

Современный вид тригонометрия получила в трудах великого учёного, члена Российской академии наук Леонарда Эйлера (1707–1783).

Эйлер ввёл и само понятие функции, и принятую в наши дни символику. Величины $\sin x$, $\cos x$ и т. д. он рассматривал как функции числа x — радианной меры соответствующего угла. Эйлер давал числу x всевозможные значения: положительные, отрицательные и даже комплексные. Он также обнаружил связь между тригонометрическими функциями и экспонентой комплексного аргумента, что позволило превратить многочисленные и зачастую весьма громоздкие тригонометрические формулы в простые следствия из правил сложения и умножения комплексных чисел. Этот учёный ввёл и обратные тригонометрические функции.

Таким образом, Эйлер создал тригонометрию как науку о функциях, дал ей аналитическое изложение, вывел всю совокупность формул из немногих основных формул. Обозначение сторон малыми буквами и противолежащих углов — соответствующими большими буквами позволило ему упростить все формулы, внести в них ясность и стройность. Эйлеру принадлежит идея рассматривать тригонометрические функции как отношения соответствующих линий к радиусу круга, то есть как числа, причём радиус круга как «полный синус» он принял за единицу. Эйлер получил ряд новых соотношений, установил связь тригонометрических функций с показательными, дал правило знаков функций для всех четвертей, получил обобщённую формулу приведения и освободил тригонометрию от многих ошибок, допущенных почти во всех европейских учебниках математики. На основании работ Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие её в строгой научной последовательности.

Основные формулы тригонометрии

Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника, а через A, B, C — соответственно величины противолежащих им углов.

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Теорема тангенсов (Региомонтана):

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}},$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}.$$

Формулы К. Мольвейде:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Углы треугольника могут быть выражены через его стороны с помощью формул:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

где p — полупериметр треугольника.

Из этих теорем с помощью тригонометрических тождеств можно вывести и другие формулы.

Площадь треугольника может быть выражена через его углы и стороны с помощью формул:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)},$$

$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Применение тригонометрии

Из школьного курса геометрии известно применение вычислительного приёма решения треугольников, основанного на теории тригонометрических функций острого угла. С помощью этого приёма решают такие задачи, как нахождение расстояния до недоступного предмета, высоты предмета и т. п. Теорию тригонометрических функций любых аргументов применяют для описания преобразований круговых движений в прямолинейные и обратно и для создания машин и механизмов, в которых происходят такие преобразования.

Тригонометрические вычисления применяют практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд — в астрономии, между ориентирами — в географии, контролировать системы навигации спутников. Также следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика, химия, теория чисел (и, как следствие, криптография), сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и геодезия, архитектура, фонетика, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

Литература

1. *Матвиевская Г. П.* Становление плоской и сферической тригонометрии. — М. : Знание, 1982.
2. *Андронов И. К., Окунев А. К.* Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач / издание второе, дополненное / пособие для учителей. — М. : Просвещение, 1967.
3. *История* математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3-х томах / под ред. А. П. Юшкевича. — М. : Наука, 1970. — 1 т.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона, Греции / перевод с голландского И. Н. Веселовского. — М. : Государственное издательство физ.-мат. литературы, 1959.
5. *Энциклопедический* словарь юного математика / составитель А. П. Савин. — М. : Педагогика, 1985.
6. *Материалы* всемирной сети Интернет.
7. *Математический* энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — М. : Советская энциклопедия, 1988.

Читайте в следующем номере:

Сферическая геометрия.