НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

Р. П. Ушаков

Квадратичной формой называют функцию двух переменных

$$f(x;y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

где A, B, C, D, E, F — действительные числа.

Рассмотрим такие вопросы:

1) нахождение экстремальных значений функции $f(x;y)$;
2) решение уравнения $f(x;y)=0$;
3) доказательство неравенства $f(x;y)\ge C$ (C — некоторое действительное число).

Квадратичную форму можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно x. Поэтому естественно использовать свойства квадратного трёхчлена.

Пусть $y=ax^2+bx+c$.

$D=b^2-4ac$ — дискриминант квадратного трёхчлена. Из равенства

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

следует, что при $a>0$

$$\min y=y\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{D}{4a}; \qquad (1)$$

при $a>0$ и $D\le 0$

$$y\ge 0. \qquad (2)$$

Для существования решений уравнения $y=0$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$D\ge 0. \qquad (3)$$

Пример 1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x;y)=5x^2+2xy+2y^2-8x+2y+6.$$

Способ 1

$$f(x;y)=5x^2+2(y-4)x+2y^2+2y+6$$

— квадратный трёхчлен относительно x. Найдём дискриминант этого квадратного трёхчлена.

$$D=2(y-4)^2-20(2y^2+2y+6)=-36y^2-72y-56.$$

Согласно (1),

$$\min f(x;y)=\frac{36y^2+72y+56}{4\cdot 5}=$$

$$=\frac{1}{5}(9y^2+18y+14)=\frac{1}{5}\left(9(y+1)^2+5\right)\ge 1.$$

Наименьшее значение достигается при

$$y_0=-1.$$

По свойству (1)

$$x_0=-\frac{2y_0-8}{10}=1.$$

Итак, наименьшее значение достигается при

$$x_0=1,\ \ y_0=-1.$$

$$f(1;-1)=1.$$

Ответ. 1.

Способ 2. Выполним подстановку $y=kx$. Тогда

$$f(x;y)=5x^2+2kx^2+2k^2x^2-8x+2kx+6=$$

$$=(2k^2+2k+5)x^2-(8-2k)x+6$$

— квадратный трёхчлен относительно x.

$$D=(8-2k)^2-24(2k^2+2k+5)=-44k^2-80k-56.$$

Согласно (1),

$$\min f(x;y)=\frac{11k^2+20k+14}{2k^2+2k+5}.$$

Пусть

$$\frac{11k^2+20k+14}{2k^2+2k+5}=z,$$

$$(11-2z)k^2+(20-2z)k+14-5z=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет решения при условии, что его дискриминант неотрицателен (свойство (3)). Значит,

$$(20-2z)^2-4(11-2z)(14-5z)\ge 0,$$

$$4(-9z^2+63z-54)\ge 0,\ \ z^2-7z+6\le 0,\ \ 1\le z\le 6,$$

$$\min z=1,$$

значит, $\min f(x;y)=1$.

При этом

$$\frac{11k^2+20k+14}{2k^2+2k+5}=1,$$

откуда $k=-1$.

$$f(x;y)=5x^2-10x+6=5(x-1)^2+1.$$

Таким образом, наименьшее значение $f(x;y)$ равно 1 и достигается при $x=1,\ \ y=-1$.

Способ 3

$$f(x;y)=\left(5x^2+2xy-8x\right)+2y^2+2y+6.$$

Мы собрали в скобках все слагаемые, которые содержат x.

$$f(x;y)=5\left(x^2+\frac{2}{5}xy-\frac{8}{5}x\right)+2y^2+2y+6.$$

Дополним выражение в скобках до полного квадрата трёхчлена:

$$f(x;y)=$$

$$=5\left[\left(x^2+\frac{1}{25}y^2+\frac{16}{25}+\frac{2}{5}xy-\frac{8}{5}x-\frac{8}{25}y\right)-\frac{1}{25}y^2-\frac{16}{25}\right]+$$

$$+\frac{8}{5}y+2y^2+2y+6=$$

$$=5\left(x+\frac{1}{5}y-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}y^2+\frac{18}{5}y+\frac{14}{5}=$$

$$=5\left(x+\frac{1}{5}y-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}(y+1)^2+1.$$

Очевидно, $\min f(x;y)=1$ при $y=-1,\ \ x=1$.

Примечание. Можно также воспользоваться тождествами

$$f(x;y)=2\left(y+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}(x-1)^2+1$$

или

$$f(x;y)=(x-y-2)^2+(2x+y-1)^2+1.$$

Пример 2. Докажите, что при произвольных действительных $x,\ y$ справедливо неравенство

$$25\left(x^2+y^2\right)+(12-3x-4y)^2\ge 72.$$

Доказательство

Способ 1. Раскрывая скобки, получим:

$$f(x;y)=34x^2+24xy+41y^2-72x-96y+72\ge 0,$$

$$f(x;y)=34x^2+24x(y-3)+41y^2-96y+72$$

— квадратный трёхчлен относительно x.

$$D=24^2(y-3)^2-4\cdot 34\left(41y^2-96y+72\right)=$$

$$=4\left(-1250y^2+2400y-1152\right).$$

Согласно (1),

$$\min f(x;y)=\frac{1250y^2-2400y+1152}{34}=$$

$$=\frac{625y^2-1200y+576}{17}=\frac{(25y-24)^2}{17}\ge 0,$$

что и требуется доказать.

$$\min f(x;y)=0 \text{ при } y=\frac{24}{25}.$$

Дальше из уравнения

$$25\left(x^2+\left(\frac{24}{25}\right)^2\right)+\left(12-3x-\frac{96}{25}\right)^2=72$$

находим $x=\dfrac{18}{25}$.

Способ 2. Положим $y=kx$.

Данное неравенство приобретает вид

$$f(x)=25\left(x^2+k^2x^2\right)+(12-3x-4kx)^2\ge 72\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(25+25k^2+(3+4k)^2\right)x^2-24(3+4k)x+72\ge 0.\ \ (*)$$

D — дискриминант квадратного трёхчлена, который находится в левой части неравенства (*).

$$\frac{D}{4}=12^2(3+4k)^2-72\left(25+25k^2+(3+4k)^2\right)=$$

$$=72(3+4k)^2-72\left(25+25k^2\right)=72\left(-9k^2+24k-16\right)=$$

$$=-72(3k-4)^2\le 0.$$

Значит, $D\le 0$ и левая часть неравенства (*) неотрицательна.

$$\min f(x)=\min f(x;y)=-\frac{D}{4a}=0 \text{ при } k=\frac{4}{3}.$$

Подставляя это значение в уравнение

$$\left(25+25k^2+(3+4k)^2\right)x^2-24(3+4k)x+72=0,$$

получим $x=\dfrac{18}{25},\ \ y=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{18}{25}=\dfrac{24}{25}$.

Способ 3. Воспользуемся тождеством

$$25\left(x^2+y^2\right)+(12-3x-4y)^2-72=$$

$$=(3y-4x)^2+2(4y+3x-6)^2,$$

из которого следует данное неравенство.

Равенство достигается лишь в случае, когда x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases}3y-4x=0,\\4y+3x-6=0,\end{cases}$$

откуда $x=\dfrac{18}{25},\ \ y=\dfrac{24}{25}$.

Пример 3. Докажите, что при произвольных действительных $x,\ y$ выполняется неравенство

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4\ge 1.$$

Доказательство

Применим способ 2 — выполним подстановку

$$y=kx.$$

Имеем:

$$f(x)=(3k^2+2k+1)x^2+2(1+3k)x+3\ge 0.$$

$f(x)$ — квадратный трёхчлен относительно x.

$$D=4(1+3k)^2-12(3k^2+2k+1)=-8<0.$$

Значит, $f(x)>0$ при произвольном действительном x.

Равенство $f(x)=0$ не достигается.

Применим способ 3.

$$f(x;y)=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4=$$
$$=(x+y+1)^2+2(y+1)^2+1.$$

При $x=0$, $y=-1$ $f(x;y)=1$.

Способы 2 и 3 дали разные результаты! В чём дело?

Дело в том, что при $x=0$ $f(x)=3$, а

$$f(x;y)=3y^2+6y+4=3(y+1)^2+1\ge 1.$$

Таким образом, при условии применения способа 2 надо отдельно рассматривать случай $x=0$.

Рассмотрим решение способом 1.

$$f(x;y)=x^2+2(y+1)x+3y^2+6y+4.$$

$$D=-8y^2-16y-12.$$

$$f(x;y)\ge -\frac{D}{4}=2y^2+4y+3=2(y+1)^2+1\ge 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Решите уравнение

$$5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0.$$

Решение

Применим способ 1.

$$f(x;y)=5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=$$
$$=5x^2+(2+8y)x+5y^2-2y+2,$$

$$D=(2+8y)^2-20(5y^2-2y+2)=-36y^2+72y-36=$$
$$=-36(y-1)^2.$$

Значит, $f(x;y)\ge \dfrac{36(y-1)^2}{20}\ge 0.$

Равенство достигается лишь при $y=1$.

Подставляя в условие $y=1$, получим:

$$5x^2+10x+5=5(x+1)^2\ge 0.$$

Равенство достигается лишь при $x=-1$.

Значит, решением уравнения является пара $(-1;1)$.

Решая уравнение способом 3, получим:

$$5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=$$
$$=4(x+y)^2+(x+1)^2+(y-1)^2,$$

откуда следует, что $x=-1$, $y=1$. Остаётся открытым вопрос, как получить нужное тождество (этих тождеств несколько).

Решите данное уравнение способом 2.

Пример 5. Решите уравнение

$$3x^2+3y^2-4xy+6x+6y+18=0.$$

Решение

$$f(x;y)=3x^2+(6-4y)x+3y^2+6y+18,$$

$$D=(6-4y)^2-12(3y^2+6y+18)=-20y^2-120y-180,$$

$$f(x;y)\ge \frac{20y^2+120y+180}{3\cdot 4}=\frac{5}{3}(y+3)^2\ge 0.$$

Равенство достигается при $y=-3$.

Подставляя в условие $y=-3$, получим:

$$3x^2+18x+27=0,\ \ x=-3.$$

Значит, решением уравнения является пара $(-3;-3)$.

Для решения уравнения способом 3 можно воспользоваться тождеством

$$f(x;y)=2(x-y)^2+(x+3)^2+(y+3)^2.$$

Пример 6. Решите уравнение

$$5x^2+2y^2-4xy-6x+4y+3=0.$$

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $f(x;y)$.

$$f(x;y)=5x^2-(4y+6)x+2y^2+4y+3,$$

$$D=(4y+6)^2-20(2y^2+4y+3)=-24y^2-32y-24.$$

Значит,

$$f(x;y)\ge \frac{24y^2+32y+24}{4\cdot 5}=\frac{1}{5}(6y^2+8y+6)=$$
$$=\frac{1}{5}\left[6\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\right]\ge \frac{2}{3}.$$

Таким образом, уравнение $f(x;y)=0$ не имеет решений.

Рассмотрим другое решение.

$$f(x;y)=(2x-y-1)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=0.$$

Это равенство возможно лишь при условии выполнения системы

$$\begin{cases}2x-y-1=0,\\x-1=0,\\y+1=0.\end{cases}$$

Поскольку эта система несовместна, решений нет.

Пример 7. Докажите неравенство

$$a^2+2b^2-2ab+2a-4b+2\ge 0.$$

Доказательство. Применим способ 2.

Пусть $b=ka$.

При $a=0$ имеем:

$$2b^2-4b+2\ge 0\Leftrightarrow 2(b-1)^2\ge 0,$$

что справедливо.

Значит, данное неравенство превращается в равенство при $a=0$, $b=1$.

Если же $a\ne 0$, то имеем:

$$f(a)=(2k^2-2k+1)a^2+2(1-2k)a+2\ge 0,$$

$$D=4(1-2k)^2-8(2k^2-2k+1)=-4<0.$$

Значит, $f(a)>0$ при любом k.

Таким образом, равенство в исходном неравенстве достигается лишь при $a=0$, $b=1$.

Другое решение можно получить из тождества

$$a^2+2b^2-2ab+2a-4b+2=(b-1)^2+(a-b+1)^2.$$

Пример 8. Докажите, что при

$$x^2+y^2+z^2>0$$

$$x^2+19y^2+6z^2-8xy-4xz+12yz>0.$$

Доказательство

$$f(x)=x^2-4(2y+z)x+19y^2+6z^2+12yz$$

— квадратный трёхчлен относительно x.

$$D=16(2y+z)^2-4(19y^2+6z^2+12yz)=$$

$$=-4(3y^2-4yz+2z^2)=-8(y+z)^2-4y^2\le 0.$$

Если $y=z=0$, то $x^2>0$ по условию и данное неравенство справедливо.

Если $y\ne 0$ или $z\ne 0$, то

$$D<0 \text{ и } f(x)>0.$$

Другое решение основано на тождестве

$$x^2+19y^2+6z^2-8xy-4xz+12yz=$$

$$=(x-4y-2z)^2+3\left(y-\frac{2}{3}z\right)^2+\frac{2}{3}z^2.$$

Правая часть положительна, если хотя бы одно из чисел x, y, z не равно 0. Но из условия

$$x^2+y^2+z^2>0$$

следует, что x, y, z не могут одновременно равняться 0.

Пример 9. Может ли выражение

$$z=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4$$

принимать отрицательные значения при действительных x, y?

Решение

$$z=x^2+2x(y+1)+3y^2+6y+4,$$

$$D=4(y+1)^2-4(3y^2+6y+4)=-4(2y^2+4y+3),$$

$$z\ge -\frac{D}{4}=2y^2+4y+3=2(y+1)^2+1\ge 1.$$

Ответ. Не может.

Пример 10. Докажите неравенство

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-18x-20y-22z+226>0.$$

Доказательство

$$f(x;y)=$$

$$=x^2+(y+z-18)x+y^2+z^2+yz-20y-22z+226.$$

$$D=(y+z-18)^2-4(y^2+z^2+yz-20y-22z+226)=$$

$$=-3y^2-3z^2-2yz+44y+52z-580=$$

$$=-(y+z)^2-2(y-11)^2-2(z-13)^2\le 0.$$

$D=0$ при выполнении системы

$$\begin{cases}y+z=0,\\y-11=0,\\z-13=0.\end{cases}$$

Однако данная система несовместна.

Значит, $D<0$, а поэтому $f(x;y)>0$, что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите наименьшее значение выражения:

   а) $2x^2+5y^2-2xy-2x-2y+3$;

   б) $x^2+5y^2-4xy+2x-2y+3$.

   Ответ. а) 2; б) 1.

2. Докажите неравенство:

   а) $x^2+5y^2+6z^2-4xy+2xz-8yz\ge 0$;

б) $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2xz-2x-2z+1\ge 0$;

в) $a^2+2b^2+5c^2-2ab-4bc-2c+4ac+1\ge 0$.

Определите, при каком условии достигается равенство.

3. Решите уравнение:

а) $5x^2+5y^2-8xy-2x-2y+2=0$;

б) $13x^2+10y^2+6xy-20x+14y+17=0$;

в) $2x^2+2y^2-2xy+10x-8y+14=0$.

Ответ. а) $x=y=1$; б) $x=1$, $y=-1$; в) $x=-2$, $y=1$.

Приведём пример из геометрии.

Пример 11. A, B, C — углы произвольного треугольника.

Докажите неравенство

$$x^2+y^2+z^2\ge 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B,$$

где x, y, z — произвольные действительные числа.

Доказательство. Перенесём все слагаемые в левую часть:

$$x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B\ge 0.$$

Левая часть полученного неравенства — это квадратный трёхчлен относительно x.

$$f(x)=x^2-2x(y\cos C+z\cos B)+y^2+z^2-2yz\cos A.$$

$$D=4(y\cos C+z\cos B)^2-4y^2-4z^2+8yz\cos A=$$
$$=4y^2(\cos^2 C-1)+4z^2(\cos^2 B-1)+$$
$$+8yz(\cos B\cos C+\cos A)=-4y^2\sin^2 C-4z^2\sin^2 B+$$
$$+8yz(\cos B\cos C-\cos(B+C)).$$

Мы учли, что

$$\cos A=\cos(180^\circ-(B+C))=-\cos(B+C).$$

Дальше заметим, что

$$\cos B\cos C-\cos(B+C)=\cos B\cos C-$$
$$-(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=\sin B\sin C.$$

Значит,

$$D=-4y^2\sin^2 C-4z^2\sin^2 B+8yz\sin B\sin C=$$
$$=-4(y\sin C-z\sin B)^2.$$

Равенство достигается при условии, что

$$y\sin C=z\sin B.$$

Из свойства (1) следует, что квадратный трёхчлен $f(x)$ принимает наименьшее значение 0 при

$$x=y\cos C+z\cos B.$$

Данное неравенство превращается в равенство лишь при условии выполнения системы

$$\begin{cases} y\sin C=z\sin B,\\ x=y\cos C+z\cos B.\end{cases}$$

Из первого равенства этой системы имеем:

$$\frac{y}{\sin B}=\frac{z}{\sin C}=t.$$

Из второго равенства системы имеем:

$$x=t\sin B\cos C+t\cos B\sin C=$$
$$=t(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=t\sin(B+C)=t\sin A.$$

Таким образом, равенство в данном неравенстве достигается лишь при

$$\frac{x}{\sin A}=\frac{y}{\sin B}=\frac{z}{\sin C}.$$

Из теоремы синусов известно, что

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ C=2R\sin C.$$

Значит,

$$\frac{x}{2R\sin A}=\frac{y}{2R\sin B}=\frac{z}{2R\sin C}\ \text{или}\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Таким образом, равенство в данном неравенстве достигается лишь в случае, когда треугольник со сторонами x, y, z подобен треугольнику со сторонами a, b, c.

Специализируя данное неравенство, можно получить много интересных неравенств.

Полагая $A=B=C=60^\circ$, получим неравенство

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx.$$

Равенство достигается лишь при условии, что $x=y=z$.

Полагая $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $C=90^\circ$, получим неравенство

$$x^2+y^2+z^2\ge\sqrt{3}yz+xz.$$

Равенство достигается лишь при

$$\frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{y}{\sin 60^\circ}=\frac{z}{\sin 90^\circ},$$

откуда $x=\frac{1}{2}t$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $z=t$, $t>0$.

Полагая $A=B=45^\circ$, $C=90^\circ$, получим неравенство

$$x^2+y^2+z^2\ge\sqrt{2}yz+\sqrt{2}xz.$$

Равенство достигается лишь при

$$x=y=\sqrt{2}t,\ z=t,\ t>0.$$

Полагая $x=y=z=1$, получим неравенство

$$\cos A+\cos B+\cos C\le 1{,}5.$$

Равенство достигается лишь при

$$A=B=C=60^\circ.$$

Полагая $x=y=2t$, $z=t$, получим неравенство

$$9\ge 8\cos C+4\cos A+4\cos B.$$

Равенство достигается лишь тогда, когда треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами x, y, z, то есть

$$a=b=2k,\ \ c=k.$$

По теореме косинусов находим

$$\cos A=\cos B=\frac{1}{4},\ \ \cos C=\frac{7}{8}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Докажите неравенство и выясните, когда достигается равенство:
   а) $2\sqrt{3}\cos A+2\cos B+\sqrt{3}\cos C\le 4$;
   б) $20\cos A+15\cos B+12\cos C\le 25$.
2. A, B, C — углы произвольного треугольника.
   Докажите, что
   $$x^2+y^2+z^2\ge\frac{2}{\sqrt{3}}\left(xy\sin C+yz\sin A+zx\sin B\right).$$
3. Докажите неравенство и выясните, когда достигается равенство:
   а) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
   б) $2\sin A+2\sin B+3\sin C<\frac{11\sqrt{3}}{3}$.

Пример 12. Числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2+3xy+y^2=5$.

Найдите наименьшее положительное значение выражения $t=x+2y$.

Решение. $x=t-2y$.

Из данного уравнения имеем:

$$(t-2y)^2+3(t-2y)y+y^2=5,$$

$$t^2-y^2-ty-5=0,\ \ y^2+ty-t^2+5=0.$$

Последнее уравнение является квадратным уравнением относительно y. Оно имеет действительные решения тогда и только тогда, когда его дискриминант $D\ge 0$, то есть

$$t^2+4t^2-20=5\left(t^2-4\right)\ge 0.$$

$$t^2\ge 4,\ \ t\le -2\ \text{ или }\ t\ge 2.$$

Наименьше положительное значение t равно 2.

Выясним, при каких x, y это наименьшее значение достигается.

$$x=2-2y.$$

$$(2-2y)^2+3(2-2y)y+y^2=5,$$

$$-y^2-2y-1=0,\ \ y=-1,\ \ x=4.$$

Ответ. $t=2$ при $x=4$, $y=-1$.

Пример 13. Числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2+2xy-y^2+x-y=4$.

Какие значения может принимать выражение $t=2x-y$?

Решение. $y=2x-t$.

Из данного уравнения имеем:

$$x^2+2x(2x-t)-(2x-t)^2+x-2x+t=4,$$

$$x^2+(2t-1)x-t^2+t-4=0.$$

Полученное квадратное уравнение относительно x имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

$$D=(2t-1)^2+4t^2-4t+16\ge 0,$$

$$8t^2-8t+17\ge 0.$$

Полученное неравенство выполняется при любом действительном t.

Ответ. t может приобретать произвольные действительные значения.

Задания для самостоятельного решения

1. Числа x, y удовлетворяют уравнению
   $$2x^2+2xy+y^2=5.$$
   Докажите, что
   $$-\sqrt{10}\le 2x+y\le\sqrt{10}.$$
2. Числа x, y, z удовлетворяют уравнению
   $$x^2+3y^2+z^2=2.$$
   Докажите, что
   $$-4\sqrt{\frac{2}{3}}\le 2x+y-z\le 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$
3. Найдите наименьше из тех значений x, для которых существуют числа y, z, которые удовлетворяют уравнению
   $$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1.$$
   Ответ. $-\sqrt{\frac{7}{5}}$.