ВОСЕМЬ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

И. А. Графова

Считаю, что красивыми являются задачи, имеющие несколько красивых, то есть доступных, не громоздких, «естественных» способов решения. Как правило, я предлагаю учащимся такие задачи при итоговом повторении материала в 9 и 11 классах. Одной из таких красивых задач является задача из учебника геометрии А. В. Погорелова.

Задача. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Решение

Для нахождения R и будем r пользоваться *рисунками 1 и 2* соответственно.

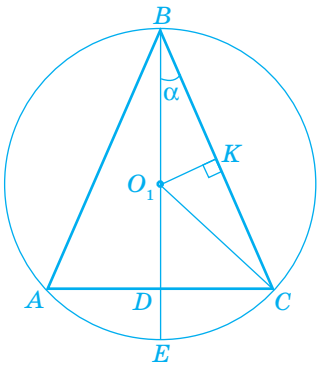

Рис. 1

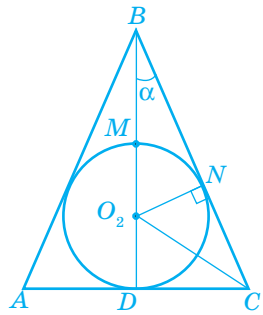

Рис. 2

Способ I

По теореме Пифагора из треугольника BDC находим

$$BD=\sqrt{13^2-5^2}=12 \text{ (см)},$$

а из треугольника O_1DC находим

$$O_1D=\sqrt{O_1C^2-DC^2}=\sqrt{R^2-5^2}.$$

Учитывая, что $BD=BO_1+O_1D$, имеем:

$$\sqrt{R^2-5^2}+R=12,$$

откуда

$$\sqrt{R^2-25}=12-R,\quad R^2-25=144-24R+R^2,$$

$$24R=169,\quad R=\frac{169}{24} \text{ см}.$$

Точка O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник, поэтому $O_2D=O_2N=r$.

Поскольку треугольники DO_2C и NO_2C равны (по гипотенузе и катету), то $DC=CN$ и $BN=13-5=8$ (см), а $BO_2=12-r$.

По теореме Пифагора из треугольника BO_2N имеем:

$$O_2N^2=O_2B^2-BN^2,$$

то есть $r^2=(12-r)^2-8^2$, откуда $r=\frac{10}{3}$ см.

Способ II

Пусть $\angle DBC=\alpha$, тогда $\cos\alpha=\frac{12}{13}$.

Точка O_1 — центр описанной окружности, $O_1K\perp BC$ и $BK=KC=6{,}5$ см.

Из треугольника O_1BK:

$$R=O_1B=\frac{BK}{\cos\alpha}=\frac{169}{24} \text{ (см)}.$$

Из треугольника DBC:

$$\sin\alpha=\frac{DC}{BC}=\frac{5}{13}.$$

Тогда из треугольника BO_2N:

$$O_2N=BO_2\sin\alpha,$$

то есть $r=(12-r)\cdot\frac{5}{13}$, откуда $r=\frac{10}{3}$ см.

Способ III

Из подобия треугольников O_1BK и CBD следует, что

$$\frac{O_1B}{BC}=\frac{BK}{BD},$$

то есть $\frac{R}{13}=\frac{6{,}5}{12}$, откуда $R=\frac{169}{24}$ см.

Из подобия треугольников O_2BN и CBD следует, что

$$\frac{BO_2}{BC}=\frac{BN}{BD},$$

то есть $\frac{12-r}{13}=\frac{8}{12}$, откуда $r=\frac{10}{3}$ см.

Способ IV

Продолжим BD до пересечения с описанной окружностью в точке E. Получим прямоугольный треугольник BCE ($\angle BCE=90°$). В этом

треугольнике $BC^2 = BD \cdot BE$, то есть $13^2 = 12 \cdot 2R$, откуда $R = \frac{169}{24}$ см.

По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки,

$$BN^2 = BM \cdot BD,$$

то есть $8^2 = (12 - 2r) \cdot 12$, откуда $r = \frac{10}{3}$ см.

Способ V

По свойству двух пересекающихся хорд AC и BE имеем:

$$AD \cdot DC = BD \cdot DE,$$

то есть $5^2 = 12 \cdot (2R - 12)$, откуда $R = \frac{169}{24}$ см.

По свойству биссектрисы CO_2 треугольника BDC имеем:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{DO_2}{BO_2},$$

то есть $\frac{5}{13} = \frac{r}{12 - r}$, откуда $r = \frac{10}{3}$ см.

Способ VI

Если $\angle DBC = \alpha$, то $\angle DO_1C = 2\alpha$ как внешний угол равнобедренного треугольника CO_1B (другое объяснение: поскольку точка B лежит по одну сторону с центром окружности O_1 относительно прямой EC, то по свойству центральных и вписанных углов $\angle CO_1E = 2\angle CBE$). Из прямоугольного треугольника DO_1C:

$$R = O_1C = \frac{DC}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{5}{2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13}} = \frac{169}{24} \text{ (см)}.$$

Из прямоугольного треугольника BO_2N находим

$$r = O_2N = BN \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= BN \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 8 \cdot \left(\frac{5}{13} : \frac{12}{13}\right) = 8 \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{3} \text{ (см)}.$$

Способ VII

Вычислив

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ (см}^2\text{)},$$

находим R и r по формулам

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a + b + c},$$

где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

Способ VIII

По теореме синусов

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{10}{2\sin 2\alpha} = \frac{10}{2 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \frac{10}{2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13}} = \frac{169}{24} \text{ (см)}.$$

Если $\angle DBC = \alpha$, то

$$\angle DCO_2 = 45° - \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника DCO_2 имеем:

$$r = O_2D = DC \cdot \operatorname{tg}\angle DCO_2 = 5 \cdot \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

а $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{5}{13} : \left(1 + \frac{12}{13}\right) = \frac{1}{5}$, находим

$$\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Значит, $r = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ (см).

Ответ. $r = \frac{10}{3}$ см, $R = \frac{169}{24}$ см.

От редакции

Уважаемые коллеги! Напоминаем, что продолжается

КОНКУРС НА САМУЮ КРАСИВУЮ ЗАДАЧУ «МИСС ЗАДАЧА»

Присылайте красивые, по вашему мнению, задачи и их РЕШЕНИЯ на адрес редакции (почтовый или электронный). Обоснуйте, почему именно эти задачи вы считаете претендентами на звание «Мисс Задача».

Итоги конкурса будут объявлены в сентябрьском номере журнала.