АЛИКВОТНАЯ ДРОБЬ

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЗАНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

С. Р. Сефибеков, с. Кашкент, Хивский р-н, Республика Дагестан

Аликвотная дробь — дробь вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число [1].

Аликвотные дроби широко использовали в Древнем Египте, поэтому они впоследствии получили название *египетские дроби.*

Для решения ряда математических и физических задач существенно то, что каждое положительное рациональное число представимо в виде суммы конечного числа аликвотных дробей. Например, $\frac{3}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66}$.

Определение. Представление аликвотной дроби в виде суммы нескольких аликвотных дробей называют разложением аликвотной дроби.

Сначала рассмотрим два примера.

Пример 1. Разложить аликвотную дробь $\frac{1}{2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.$$

Заметим, что $4+4=8=2^3$.

Пример 2. Разложить аликвотную дробь $\frac{1}{3}$.

Решение

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}.$$

Заметим, что $9+9+9=27=3^3$.

Таким образом, на основании рассмотренных примеров можно выдвинуть следующую гипотезу:

1) Аликвотные дроби $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}.$$

Тогда $x_1+x_2=2^3$, если $x_1=x_2$.

2) Аликвотные дроби $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{3}.$$

Тогда $x_1+x_2+x_3=3^3$, если $x_1=x_2=x_3$.

Докажем истинность этой гипотезы.

Доказательство

1) Пусть $x_1\le x_2$. Тогда имеем:

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}\ge\dfrac{1}{x_2},\\[2mm] \dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_2}\end{cases}$$
$$\overline{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\ge\dfrac{2}{x_2},}$$

или, с учётом условия, $\frac{1}{2}\ge\frac{2}{x_2}$, $\frac{2}{4}\ge\frac{2}{x_2}$, откуда $\min x_2=4$. Тогда $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, откуда $x_1=4$. Значит, $x_1+x_2=4+4=8=2^3$.

2) Пусть $x_1\le x_2\le x_3$. Тогда имеем:

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}\ge\dfrac{1}{x_3},\\[2mm] \dfrac{1}{x_2}\ge\dfrac{1}{x_3},\\[2mm] \dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{x_3},\end{cases}$$
$$\overline{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\ge\dfrac{3}{x_3},}$$

или, с учётом условия, $\frac{1}{3}\ge\frac{3}{x_3}$, $\frac{3}{9}\ge\frac{3}{x_3}$, откуда $\min x_3=9$. Тогда по условию

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{9},\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}.$$

$$x_1=x_2=9.$$

Значит, $x_1+x_2+x_3=9+9+9=27=3^3$.

Замечание. В случае 1) мы положили

$$x_2=\min x_2=4.$$

В противном случае $x_1+x_2\ne 2^3$.

В случае 2) мы положили $x_3=\min x_3=9$. В противном случае $x_1+x_2+x_3\ne 3^3$. (Убедитесь в этом!).

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1

1) Аликвотные дроби $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ удовлетворяют равенству $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$. Тогда $x_1+x_2=2^3$, если $x_1=x_2$.

2) Аликвотные дроби $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{3}.$$

Тогда $x_1+x_2+x_3=3^3$, если $x_1=x_2=x_3$.

Обобщением теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. Аликвотные дроби $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, ..., $\frac{1}{x_n}$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{n}.$$

Тогда $x_1+x_2+\ldots+x_n=n^3$ $(n\geq 2)$, если

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Доказательство

Пусть $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$. Тогда имеем:

$$+\begin{cases}\frac{1}{x_1}\geq\frac{1}{x_n},\\ \frac{1}{x_2}\geq\frac{1}{x_n},\\ \ldots\\ \frac{1}{x_{n-1}}\geq\frac{1}{x_n},\\ \frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_n}\end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}_{n\text{ слагаемых}}\geq\underbrace{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n}+\ldots+\frac{1}{x_n}}_{n\text{ слагаемых}}=\frac{n}{x_n}.$$

С учётом условия получим:

$$\frac{1}{n}\geq\frac{n}{x_n},\quad \frac{n}{n^2}\geq\frac{n}{x_n},$$

откуда $\min x_n=n^2$. Тогда по условию:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n},$$

или

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2},$$

или

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}=\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{(n-1)\text{ слагаемых}},$$

$$x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=n^2.$$

Значит,

$$\underbrace{x_1+x_2+\ldots+x_n}_{n\text{ слагаемых}}=\underbrace{n^2+n^2+\ldots+n^2}_{n\text{ слагаемых}}=n^2\cdot n=n^3.$$

Теорема доказана.

Приведённое выше замечание остаётся в силе при доказательстве теоремы 2.

Данное в условии теоремы 2 равенство можно записать в виде:

$$\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{n\text{ слагаемых}}\ (n\geq 2).\qquad (*)$$

Примечание. Формула (*) является алгоритмом для представления аликвотной дроби в виде суммы аликвотных дробей разными способами.

Рассмотрим несколько задач, при решении которых будем использовать формулу (*).

Задача 1. Разложить дробь $\frac{1}{2}$ на аликвотные дроби.

Решение

В данном случае $n=2$. Имеем:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4};\qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8};\qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16};\qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32};\qquad (4)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\qquad (5)$$

и так далее.

Задача 2. Воспользовавшись представлениями (2)–(5), полученными в задаче 1, написать дроби, которые можно разложить на аликвотные дроби с разными знаменателями.

Решение

Из (2): $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

Из (3): $\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, $\frac{7}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$.

Из (4):

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{32}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32},\quad \frac{15}{32}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}.$$

Из (5): $\frac{1}{2}-\frac{1}{64}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$,

$$\frac{31}{64}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}.$$

Ответ. $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{15}{32}$; $\frac{31}{64}$.

Задача 3. Разложить дробь $\frac{1}{3}$ на аликвотные дроби.

Решение

Здесь $n=3$. Имеем:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}+\frac{1}{54}+$$
$$+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{108}+\frac{1}{108}+\frac{1}{108}+\frac{1}{108} \quad (3)$$

и так далее.

Задача 4. Воспользовавшись представлениями (2) и (3), полученными в задаче 3, написать дроби, которые можно разложить на аликвотные дроби с разными знаменателями.

Решение

Из (2):

$$\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}, \quad \frac{11}{54}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}.$$

Из (3):

$$\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{54}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{108}+\frac{1}{108}+\frac{1}{108}\right)=$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}+\frac{1}{81}+\frac{1}{108},$$
$$\frac{19}{81}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}+\frac{1}{81}+\frac{1}{108}.$$

Ответ. $\frac{11}{54}$; $\frac{19}{81}$.

Выше мы привели пример:

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66}.$$

А как получили такое разложение?

Можно рассуждать следующим образом.

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}. \quad (1)$$

Перепишем равенство (1) в виде:

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}. \quad (2)$$

Общий знаменатель дробей в правой части равенства (2) должен быть кратным 11. Положим, например, $m=11k$. Тогда равенство (2) принимает вид:

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{11k}+\frac{1}{p},$$

или

$$\frac{3}{11}=\frac{k+1}{11k}+\frac{1}{p}. \quad (3)$$

Проведём по равенству (3) испытания при

$$k=2;\ 3;\ 4;\ \ldots$$

Если $k=2$, то

$$\frac{3}{11}=\frac{3}{22}+\frac{1}{p}, \quad \frac{3}{11}=\frac{3p+22}{22p},$$
$$66p=33p+242, \quad p=\frac{242}{33},$$

то есть число p не натуральное. Значит, $k\neq 2$.

Если $k=3$, то

$$\frac{3}{11}=\frac{4}{33}+\frac{1}{p}, \quad \frac{3}{11}=\frac{4p+33}{33p},$$
$$99p=44p+363, \quad p=\frac{363}{55}$$

— не натуральное число. Значит, $k\neq 3$.

Аналогично $k\neq 4$, $k\neq 5$ (убедитесь в этом!).

Если $k=6$, то

$$\frac{3}{11}=\frac{7}{66}+\frac{1}{p}, \quad \frac{3}{11}=\frac{7p+66}{66p},$$
$$198p=77p+726, \quad 121p=726, \quad p=6.$$

Значит,

$$k=6, \quad m=66, \quad p=6 \text{ и } \frac{3}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66}.$$

А как разложить аликвотную дробь $\frac{1}{n}$ на аликвотные дроби с разными знаменателями? Составление общего алгоритма для решения данной задачи пока остаётся нерешённой проблемой (предлагаем читателям работать над её решением).

Рассмотрим частные случаи.

Пусть $n=2$. Тогда имеем дробь $\frac{1}{2}$. Разложим эту дробь на две дроби:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2},$$

где $x_1\neq x_2$. Положим

$$x_1=2+t_1, \quad x_2=2+t_2,$$

где $t_1\neq t_2$.

Тогда

$$\frac{1}{2+t_1}+\frac{1}{2+t_2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{4+t_1+t_2}{4+2t_1+2t_2+t_1t_2}=\frac{1}{2},$$
$$8+2t_1+2t_2=4+2t_1+2t_2+t_1t_2, \quad t_1t_2=4.$$

Поскольку $4=1\cdot 4=2\cdot 2$, то имеем два представления: $t_1t_2=1\cdot 4$, $t_1t_2=2\cdot 2$. Так как $t_1\neq t_2$, то положим, например, $t_1=1$ и $t_2=4$. Тогда $x_1=2+1=3$, $x_2=2+4=6$. Следовательно, имеем разложение $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

Пусть $n=3$. Тогда имеем дробь $\frac{1}{3}$. Разложим эту дробь на три дроби:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{3},$$

где $x_1\neq x_2\neq x_3$.

Положим $x_1=3+t_1$, $x_2=3+t_2$, $x_3=3+t_3$, где $t_1\neq t_2\neq t_3$.

Тогда $\frac{1}{3+t_1}+\frac{1}{3+t_2}+\frac{1}{3+t_3}=\frac{1}{3}$,

$$\frac{27+6(t_1+t_2+t_3)+(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)}{27+9(t_1+t_2+t_3)+3(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)+t_1t_2t_3}=\frac{1}{3},$$

$$54+9(t_1+t_2+t_3)=t_1t_2t_3. \qquad (*)$$

Левая часть равенства (*) кратна 9. Тогда и правая его часть должна быть кратна 9.

Пусть $t_1=9$. Тогда равенство (*) принимает вид:

$$54+9(9+t_2+t_3)=9t_2t_3,$$

$$15+t_2+t_3=t_2t_3,\ 15+t_3=t_2(t_3-1),$$

откуда $t_2=\frac{15+t_3}{t_3-1}=\frac{(t_3-1)+16}{t_3-1}$,

$$t_2=1+\frac{16}{t_3-1}. \qquad (**)$$

Так как $t_3\neq 1$, то при $t_3=1$ равенство

$$15+t_3=t_2(t_3-1)$$

не выполняется.

По формуле (**) имеем:

$$t_3-1=1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16,$$

$$t_3=2;\ 3;\ 5;\ 9;\ 17,$$

$$t_2=17;\ 9;\ 5;\ 3;\ 2.$$

Имеем следующие тройки $(t_1;t_2;t_3)$:

$$(9;17;2),\ (9;9;9),\ (9;5;5),\ (9;3;9),\ (9;2;17).$$

Поскольку $t_1\neq t_2\neq t_3$, то подходят числа 2, 9 и 17.

Положим $t_1=2$, $t_2=9$, $t_3=17$. Тогда

$$x_1=5,\ x_2=12,\ x_3=20.$$

Таким образом, имеем разложение:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}.$$

Задача 5. Решите уравнение в натуральных числах:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}$, где $x_1\le x_2\le x_3$;

2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{2}$, где $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$;

3) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}=\frac{1}{3}$, где

$$x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5\le x_6.$$

Решение

1) Из равенства (2) задачи 1 следует:

$$x_1=4,\ x_2=x_3=8.$$

2) Из равенства (3) задачи 1 следует:

$$x_1=4,\ x_2=8,\ x_3=x_4=16.$$

3) Из равенства (2) задачи 3 следует:

$$x_1=9,\ x_2=x_3=18,\ x_4=x_5=x_6=27.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Один рабочий выполняет работу за 4 дня. За сколько дней выполнит эту работу второй рабочий, если они, работая вместе, выполняют её за два дня?

   Указание. Решение задачи сводится к уравнению $\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$.

   Ответ. За 2 дня.

2. Четыре проводника соединены параллельно. Сопротивление первого проводника 4 Ом, а сопротивление цепи 2 Ом. Найдите сопротивление остальных трёх проводников.

   Указание. Решение задачи сводится к уравнению

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$

(задача 5 2)).

   Ответ. 8 Ом; 16 Ом; 16 Ом.

Литература

1. *Математическая* энциклопедия / под ред. И. М. Виноградова. — М. : Советская энциклопедия, 1977. — Т. 1. — С. 235.
2. *Математика.* 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». — 11-е изд. — М. : Просвещение, 2010. — 303 с. : ил. — (Академический школьный учебник).